This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

QA
841
.R43

TRAITÉ

DE

CINÉMATIQUE PURE.

L'Auteur et l'Éditeur se réservent le droit de traduire ou de faire traduire cet Ouvrage en toutes langues. Ils poursuivront, en vertu des Lois, Décrets et Traités internationaux, toutes contrefaçons ou toutes traductions faites au mépris de leurs droits.

Le dépôt légal de cet Ouvrage a été fait à Paris dans le mois d'Octobre 1862, et toutes les formalités prescrites par les Traités sont remplies dans les divers États avec lesquels la France a conclu des conventions littéraires.

Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur, sera réputé contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

Mallet-Bachelier

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

TRAITÉ

DE

CINÉMATIQUE PURE,

PAR H. RESAL,

INGÉNIEUR DES MINES, DOCTEUR ÈS SCIENCES.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1862

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

PRÉFACE.

L'étude de la Mécanique présente dès son début de sérieuses difficultés, en raison des hypothèses et des principes admis à priori sur lesquels on la fait reposer et dont l'exactitude ne se trouve vérifiée que par la concordance entre les conséquences qui en découlent et les faits déduits de l'expérience ou de l'observation.

Le point de départ de la Mécanique est l'idée assez vague que nous pouvons nous former : 1° des causes du mouvement et des modifications qu'il éprouve ; 2° de la masse ; et encore, pour ne pas tomber complétement dans l'obscurité, sommes-nous obligés de nous reporter à la fiction du mouvement d'une simple molécule, considérée comme isolée, que l'on suppose en outre dépourvue de dimensions ou réduite à un simple point géométrique, tout en lui attribuant les propriétés physiques de la matière.

Les lois du mouvement d'un point étant ainsi obtenues, on établit celles du mouvement des systèmes matériels, en se fondant sur le principe, dû à Newton, de l'égalité entre l'action et la réaction.

Lorsque l'on considère ensuite les corps solides, on fait une autre hypothèse, en les assimilant à de véritables systèmes invariables.

T 5-2 C-05-
Rel. 10-6-31 MEN

135929

Mais les lois du mouvement d'un point ne sont-elles pas réellement indépendantes des notions de force et de masse? Un certain nombre de propriétés du mouvement des systèmes invariables ne peuvent-elles pas être dégagées de toutes les hypothèses spécifiées plus haut?

S'il en est ainsi, la Mécanique se divise naturellement en deux parties : l'une rationnelle et purement géométrique, où l'on étudie le mouvement en lui-même; l'autre essentiellement physique, reposant sur les notions de force et de masse; et, dans l'enseignement de la Mécanique, il me semble plus logique d'exposer en premier lieu les propriétés géométriques du mouvement, pour passer de là aux forces, c'est-à-dire à la cause même du mouvement.

Newton paraît avoir vu clairement cette division; Euler fit faire un progrès à la Mécanique géométrique en étudiant le déplacement d'une figure sphérique sur sa sphère, pour arriver à l'axe instantané de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe; puis vinrent MM. Bobillier, Chasles et Hachette, qui s'occupèrent, au point de vue exclusivement géométrique, du tracé des normales et des tangentes aux courbes, par la considération du *centre instantané de rotation* des figures mobiles dans un plan. Avant eux Descartes avait considéré le cas spécial des roulettes ou du *centre instantané de pivotement* d'une courbe plane, roulant sur une autre et entraînant avec elle tous les points de son propre plan. Enfin l'existence de l'*axe instantané, par rotation et glissement*, des solides dans l'espace fut démontrée géométriquement par M. Poinsot et par M. Chasles, et M. Poncelet, abandonnant les cônes

roulants de M. Poinsot, fit voir que le mouvement le plus général d'un corps solide se réduit à celui d'une surface gauche qui roule et glisse sur une autre surface gauche, fixe dans l'espace, avec laquelle elle se raccorde constamment.

D'Alembert avait songé à l'utilité qu'il y aurait à étudier le mouvement, abstraction faite de ses causes; Carnot avait même projeté, sous le nom de *mouvements géométriques*, un ouvrage qui n'a malheureusement pas paru, mais dont il donne une idée dans divers écrits.

Dans son *Essai sur la Classification des Connaissances humaines*, Ampère fait ressortir tous les avantages que l'on retirerait d'une science dans laquelle on s'occuperait des propriétés géométriques du mouvement sans faire intervenir les idées de force et de masse. Il donne le nom de *Cinématique* (κινημα, mouvement) à cette science, qu'il circonscrit toutefois à l'étude des rapports entre les vitesses des différentes pièces d'une machine.

Dans ses leçons à la Faculté des Sciences de Paris (1838 à 1840), M. Poncelet essaya de réaliser la conception philosophique d'Ampère, en l'appliquant à la théorie géométrique des principaux organes de transmission du mouvement, à celle des appareils à *indication continue* ou *traceurs*, propres à observer expérimentalement la loi des mouvements absolus ou relatifs, etc.

L'année suivante (1841), M. Willis, professeur à l'Université de Cambridge, publia son *Traité de Cinématique*, où se trouvent exposés la théorie géométrique et le tracé d'un grand nombre de mécanismes.

En 1841, M. Poncelet, agrandissant le cercle des

idées géométriques relatives au mouvement curviligne, introduisait dans la science la notion fondamentale des *accélérations géométriques*, dont j'ai introduit la considération dans mes *Éléments de Mécanique* (*), en m'appuyant sur les données des leçons du même géomètre à la Faculté des Sciences de Paris.

C'est ainsi que M. Poncelet parvint définitivement à poser les bases d'une science qu'Ampère s'était plu à définir, en ne l'envisageant toutefois que dans ses applications pratiques, et qui, si l'on en excepte un Mémoire de M. Transon (**) sur le mouvement des figures planes, se trouvait limitée aux déplacements du premier ordre.

En partant des accélérations simples de M. Poncelet, M. Bresse (***) donna, en la complétant par l'addition de propriétés nouvelles, une autre solution du problème des rayons de courbure des figures planes, traité antérieurement par M. Transon.

De son côté, M. Rivals (****) établit un théorème remarquable sur l'accélération dans le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Enfin, le théorème de Coriolis sur le mouvement relatif ou apparent d'un point n'est plus maintenant qu'une question de Cinématique, comme on peut le voir dans les *Additions* à mes *Éléments de Mécanique*.

(*) Paris, 1851, chez MM. Didot frères et Mallet-Bachelier, libraires. Cet ouvrage comprend, sous le titre d'*Additions*, l'exposé rapide des principes fondamentaux de la Dynamique des points matériels et leurs plus simples applications à l'Astronomie et à la Physique terrestre.

(**) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. X, p. 845.

(***) T. XX, XXXVe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 89; 1851.

(****) *Ibid*, Appendice, p. 109.

Je donnerai le nom de *Cinématique pure* à la science rationnelle dans laquelle on s'occupe des mouvements géométriques, considérée en dehors de son application à la théorie des machines, qu'Ampère appelait tout simplement *Cinématique*.

Depuis 1850, je n'ai pas cessé d'étendre le domaine de la Cinématique, et je suis arrivé à des théorèmes que je crois importants sur le roulement et le glissement des corps solides, sur les accélérations dans le mouvement le plus général d'un système invariable, sur le mouvement relatif d'un point et d'un corps solide, et enfin sur les déplacements du troisième ordre mesurés par ce que j'ai appelé la *suraccélération*, et dont M. Transon (*) s'était déjà occupé, sous un autre nom, dans le seul cas du mouvement d'un point, mais en se plaçant à un point de vue plutôt métaphysique que géométrique ou dynamique.

Dans le présent ouvrage, je me suis attaché à coordonner les connaissances que nous possédons en Cinématique pure, à en former un corps de doctrine qui se suffise à lui-même, au moyen d'un certain nombre de démonstrations nouvelles propres à faire éviter les cercles vicieux et les pétitions de principes.

J'ai cherché de plus à montrer, par un grand nombre d'exemples, les ressources que la Cinématique fournit à la Mécanique et à la Géométrie; parmi ces exemples, je citerai la théorie de la courbure des surfaces et la recherche des propriétés des enveloppes des courbes planes et sphériques déduites de la considération des mouvements relatifs.

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. X, 1845.

Dès que l'on a posé les lois de l'inertie et de l'égalité entre l'action et la réaction, la partie physique de la Mécanique, c'est-à-dire l'étude du mouvement des systèmes matériels, des corps solides, se réduit à un simple corollaire de la Cinématique; et les problèmes que l'on peut se proposer ne présentent plus que des difficultés de calcul souvent réduites par la Géométrie.

Enfin j'ai esquissé, dans quelques notes placées soit au bas des pages, soit à la fin du volume, les principales applications de la Cinématique à la Mécanique, extraites en grande partie de Mémoires que j'ai publiés dans divers recueils.

Qu'il me soit permis, en terminant, d'adresser mes remercîments à M. Chevilliet, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Besançon, qui a bien voulu revoir mon travail, et m'indiquer d'utiles corrections.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

PRÉFACE..... V

CHAPITRE PREMIER.

DE LA VITESSE.

§ Ier. *Notions préliminaires.* — Repos et mouvement. — Corps solides. — Mouvement rectiligne ou curviligne. — Trajectoire..... 1

§ II. *De la vitesse.* — Mouvement uniforme, vitesse. — Mouvement varié, vitesse. — Représentation géométrique du mouvement. — Vitesse angulaire. — Du mouvement uniformément varié. — Application à la chute et à l'ascension des corps pesants dans le vide..... 2

§ III. *De la projection des vitesses sur une droite ou sur un plan*..... 10

§ IV. *De la composition des vitesses simultanées.* — Mouvements simultanés. — Composition et décomposition des vitesses. Digression sur les sommes et les différences algébriques. 12

§ V. *Application de la composition des vitesses à la Géométrie.* — Méthode de Roberval pour mener les tangentes aux courbes; application à la spirale d'Archimède, à la quadratrice, aux sections coniques et à la cycloïde..... 19

CHAPITRE II.

DE L'ACCÉLÉRATION ET DE SES PROPRIÉTÉS.

§ Ier *De l'accélération.* — Définition. — Théorème sur l'accroissement de la vitesse projetée sur un axe. — De l'accélération dans le mouvement circulaire uniforme. — Des

Pages.

accélérations planétaires; cas de la Lune et de la Terre. — Mouvement elliptique des planètes autour du Soleil; lois de Képler; anomalie excentrique..... 24

§ II. *De la projection de l'accélération sur un axe.* — Application aux mouvements oscillatoires, au mouvement parabolique des projectiles dans le vide..... 35

§ III. *De la projection de l'accélération sur un plan.* — Projection sur un plan d'un mouvement circulaire uniforme.... 39

§ IV. *De la composition des accélérations.* — Différentiation d'une équation géométrique. — Mouvement circulaire uniforme d'un point pesant sur un cercle vertical. — Des accélérations normale et tangentielle. — Expression de l'accélération totale en fonction de la vitesse. — Mouvement d'un point sur une courbe ou une surface fixes. — Théorème sur la courbure de la parabole. — Chemin parcouru en fonction de l'accélération. — Accélération centrifuge 42

§ V. *Application de la composition des accélérations.* — Du pendule simple. — Du pendule à oscillations elliptiques. — Du pendule conique. — Mouvement d'un point pesant sur un plan incliné. — Détermination du rayon de courbure de quelques courbes. — Propriétés de la cycloïde. — Tautochronisme. — Pendule cycloïdal de Huygens..... 50

§ VI. *Théorèmes généraux relatifs au mouvement d'un point.* — Équations du mouvement d'un point. — Application au mouvement parabolique des projectiles. — Produits géométriques. — Théorèmes sur les accélérations. — Expression du demi-accroissement du carré de la vitesse. — Du mouvement d'un point pesant sur une courbe. — Brachistochrone. — Propriété mécanique de la lemniscate. — Théorèmes sur les moments. — Expression de l'accroissement du moment de la vitesse projetée sur un plan. — Principe des aires, etc. — Équations du mouvement d'un point dont l'accélération passe constamment par un point fixe..... 62

CHAPITRE III.

MOUVEMENTS GÉOMÉTRIQUES DES SYSTÈMES INVARIABLES.

§ Ier. *Mouvements de translation et de rotation.* — Glissement. — Roulement..... 80

Pages.

§ II. *Du mouvement d'un système invariable parallèle à un plan fixe.* — Du centre instantané de rotation. — Le mouvement le plus général d'une figure plane se réduit au roulement d'une courbe sur une autre. — Application à la cissoïde, à la conchoïde, etc., aux bielles et manivelles, au parallélogramme de Watt, à la coulisse Stéphenson droite et renversée..... 82

§ III. *Du mouvement le plus général d'un système invariable.* — Relations entre les vitesses des sommets d'un triangle. — Axe instantané de rotation et de glissement. — Il y a une infinité d'axes instantanés de rotation. — Joint de Cardan. — Application à la Géométrie..... 97

§ IV. *Composition des translations et des rotations.* — Projections sur trois axes rectangulaires de la vitesse d'un point résultant d'une rotation. — Formules diverses applicables au mouvement d'un corps solide..... 103

§ V. *De l'accélération angulaire.* — Formules et propriétés diverses..... 113

§ VI. *Applications de la composition des rotations.* — Propriétés d'un système de distribution de la vapeur adopté sur quelques bateaux. — Du glissement aux points de jonction des pièces articulées..... 116

§ VII. *Du roulement et du glissement des corps solides.* — Enveloppe des positions d'une surface mobile. — Application aux engrenages. — Conditions que doivent remplir deux surfaces réglées pour qu'elles puissent se mouvoir l'une sur l'autre en se raccordant. — Digression sur quelques propriétés des surfaces. — Formules relatives au roulement; discussion. — Des engrenages sans frottement. — Propriétés diverses des courbes de roulement..... 119

CHAPITRE IV.

DE L'ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT DES SYSTÈMES INVARIABLES.

§ Ier. *De l'accélération dans le mouvement d'une figure plane dans son plan.* — Centre des accélérations. — Lieux des points pour lesquels les accélérations normale et tangen-

Pages.

tielle sont nulles. — Théorèmes divers. — Du rayon de courbure des épicycloïdes, de la chaînette, de la cissoïde, de la conchoïde, de la courbe à longue inflexion, etc. — Application aux transmissions de mouvement..... 174

§ II. *De l'accélération dans le mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe.* — Théorème de M. Rivals. — Formules diverses. — Rayon de courbure de l'épicycloïde sphérique..... 191

§ III. *De l'accélération dans le mouvement le plus général d'un système invariable.* — Centre des accélérations. — Lieux des points pour lesquels est nulle chacune des accélérations, normale et tangentielle. — Application à la Géométrie. — Condition pour que le lieu des axes instantanés de rotation et de glissement soit développable 197

CHAPITRE V.

DU MOUVEMENT RELATIF.

§ Ier. *Du mouvement relatif d'un point par rapport à un système invariable.* — Théorème de Coriolis. — Du repos relatif; application à la gravité. — Expression de l'accroissement du carré de la vitesse relative. — Propriétés de l'accélération centrifuge composée. — Influence de la rotation de la Terre sur la chute des graves et sur le pendule simple. — Équations générales du mouvement relatif; application aux phénomènes terrestres. — Application de la théorie du mouvement relatif à la recherche de la courbure de quelques courbes, des propriétés de la courbure des surfaces et de la courbure des enveloppes des courbes planes et sphériques. — Application aux engrenages coniques, aux propriétés du lieu décrit par le centre de courbure d'une courbe qui roule sur une autre courbe 225

§ II. *Propriétés géométriques du mouvement relatif d'un solide par rapport à un milieu mobile.* — Formules diverses.... 263

CHAPITRE VI.

DE LA SURACCÉLÉRATION.

§ Ier. *De la suraccélération dans le mouvement d'un point.* — Composantes tangentielle, normale et binormale. — Digres-

Pages.

sion sur quelques propriétés des courbes. — Rayon de courbure de la développée de la cycloïde, des sections coniques. De la déviation dans les courbes planes. — Forme remarquable que prend la suraccélération normale. — Du rayon de torsion et de l'hélice..... 269

§ II. *De la suraccélération dans le mouvement relatif d'un point.* — Application aux courbes polaires, à la spirale logarithmique et aux surfaces..... 284

§ III. *De la suraccélération dans le mouvement d'une figure plane.* — Application aux épicycloïdes planes, à la chaînette, à la cissoïde, etc., et aux enveloppes des courbes planes. — Des suraccélérations des divers ordres..... 296

§ IV. *De la suraccélération dans le mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe.* — Application à l'épicycloïde sphérique, et aux enveloppes des courbes sphériques. 315

§ V. *De la suraccélération dans le mouvement le plus général d'un système invariable*..... 325

NOTES.

NOTE I. *Sur le mouvement pendulaire*..... 329

NOTE II. *Mouvement d'un point sur une surface*..... 336

NOTE III. *Du mouvement du pendule en tenant compte de la rotation de la Terre et de la résistance de l'air*..... 341

NOTE IV. *Sur le mouvement d'un corps autour d'un point fixe.* 344

NOTE V. *Sur le mouvement relatif d'un corps solide*..... 379

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 151, 1re, 4e, 6e ligne en remontant, *au lieu de* $\sqrt{\lambda\mu}$, *lisez* $\frac{1}{2}\sqrt{\lambda\mu}$.

Page 152, 2e ligne, *au lieu de* $\sqrt{\lambda\mu}$, *lisez* $\frac{1}{2}\sqrt{\lambda\mu}$.

4e ligne, au lieu de *est une moyenne*, lisez *est la moitié de la moyenne.*

7e ligne en remontant, *au lieu de* $\cos^2\varepsilon = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{\nu}$, *lisez* $\cos^2\varepsilon = \frac{2\nu}{\sqrt{\lambda\mu}}$.

6e ligne en remontant, au lieu de *est la moyenne*, lisez *est la moitié de la moyenne.*

2e ligne en remontant, *au lieu de* $\cos^2\varepsilon = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{\sqrt{\lambda_0\mu_0}}$, *lisez*

$$\cos^2\varepsilon = \frac{\sqrt{\lambda_0\mu_0}}{\sqrt{\lambda\mu}}.$$

Page 166, 4e ligne, *au lieu de* $\operatorname{tang}\beta = \frac{\pm\frac{\tau}{a'}}{1 \mp \frac{\tau}{a'}\cot\delta'}$, *lisez*

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\pm 2\frac{\tau'}{a'}}{1 \mp 2\frac{\tau}{a'}\cot\delta'}.$$

Page 168, 6e ligne en remontant, *au lieu de* $\nu = \sqrt{\lambda_0\mu_0}$, $\nu' = \sqrt{\lambda'_0\mu'_0}$, *lisez*

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_0\mu_0},\ \nu' = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda'_0\mu'_0}.$$

Page 197, 5e ligne, *au lieu de* $\frac{\cos\eta}{\cos\varepsilon}$, *lisez* $\frac{\cot\eta}{\cos\varepsilon}$.

Page 267, 1re ligne en remontant, *au lieu de* A_z, *lisez* $\mathcal{A}_z$.

3e ligne en remontant, *au lieu de* A_y, *lisez* $\mathcal{A}_y$.

5e ligne en remontant, *au lieu de* A_x, *lisez* $\mathcal{A}_x$.

TRAITÉ

DE

CINÉMATIQUE PURE.

CHAPITRE PREMIER.

DE LA VITESSE.

---

§ Ier. — Notions préliminaires.

1. Un corps est en *repos* ou en *mouvement*, selon que sa position par rapport à celle d'autres corps considérés comme fixes reste constamment la même ou varie successivement.

Le repos et le mouvement sont *absolus* ou *relatifs*, suivant que les corps auxquels on rapporte la position du mobile, occupent ou n'occupent pas constamment le même lieu de l'espace.

Le repos absolu ne paraît pas devoir exister dans la nature; on sait, en effet, que les corps placés à la surface de la terre participent au double mouvement de cette planète autour de son axe et autour du soleil, et que le soleil lui-même est emporté dans l'espace en entraînant avec lui les planètes et les satellites qui les accompagnent.

2. Un corps *solide* ou *système invariable* sera pour nous un système géométrique de points dont les distances respectives restent constamment les mêmes.

Pour passer de cette définition à celle des corps solides

tels que la nature nous les présente, il suffit de supposer que ces points sont des éléments matériels doués de certaines propriétés physiques de la matière dont nous n'avons pas à parler ici.

Nous nous occuperons en premier lieu du mouvement d'un point faisant ou non partie d'un système invariable, ce qui nous donnera, comme nous le verrons plus tard, tous les éléments nécessaires pour aborder l'étude du mouvement d'un corps solide.

3. Lorsqu'un point se meut, ses diverses positions déterminent les points d'une courbe *continue* nommée *trajectoire*. Selon que cette trajectoire est droite ou courbe, on dit que le mouvement est *rectiligne* ou *curviligne*.

On appelle ordinairement *élément de chemin* ou *chemin élémentaire* un arc infiniment petit de la trajectoire.

§ II. — De la Vitesse.

4. *Mouvement uniforme.* — Le mouvement d'un point, curviligne ou rectiligne, est *uniforme* lorsque les chemins qu'il parcourt sont proportionnels aux temps employés à les parcourir.

On donne le nom de *vitesse*, dans le mouvement uniforme, au chemin parcouru dans l'unité de temps adoptée.

Soient s l'arc de trajectoire décrit ou parcouru au bout du temps t, v la vitesse; on a

$$\frac{s}{t} = \frac{v}{1}, \quad s = vt;$$

de sorte que *la vitesse est égale au rapport constant des espaces parcourus aux temps écoulés, et l'espace parcouru est égal au produit de la vitesse par le temps.*

Nous prendrons le mètre pour unité de longueur et la 86 400e partie du jour moyen ou la *seconde* pour unité de temps.

5. *Mouvement varié.* — Le mouvement est varié quand les chemins parcourus ne sont pas proportionnels aux temps correspondants.

Il arrive souvent dans les applications que le rapport varie assez peu de part et d'autre d'une certaine valeur constante : on considère alors le mouvement comme uniforme; mais la vitesse qui résulte de cette hypothèse n'est à proprement parler qu'une *vitesse moyenne*. C'est ainsi que l'on dit d'un homme, d'un cheval, d'une locomotive, que leur vitesse est de tant de mètres par seconde, par minute, ou de tant de kilomètres par heure; mais ces chiffres ne donnent que de simples approximations.

6. *Représentation géométrique de la loi du mouvement varié.*

Il résulte de ce qui précède que la loi du mouvement varié d'un point sur sa trajectoire sera connue si l'on donne une équation de la forme

$$s = f(t),$$

au moyen de laquelle on calculera le chemin parcouru au bout d'un temps donné t, ce qui fera connaître la position du mobile, en comptant les chemins à partir d'une origine commune.

On aura une représentation géométrique du mouvement en construisant la courbe ayant pour équation

$$s = f(t),$$

dont t représenterait l'abscisse et s l'ordonnée. Le tracé de la courbe pourra s'effectuer soit au moyen de la relation ci-dessus, soit par la seule connaissance d'une table qui donnerait en nombres les valeurs de s correspondant à une série de valeurs de t ; c'est ce qui arrivera notamment lorsque les temps et les espaces seront des résultats de l'observation.

En appliquant ces considérations au mouvement uniforme, on reconnaît, en prenant pour origine la position initiale du mobile, que la loi du mouvement est représentée graphiquement par une droite *passant par l'origine* des temps et dont le *coefficient angulaire* mesure la vitesse.

7. *Vitesse dans le mouvement varié.* — On appelle *vitesse* du mobile au bout du temps t, dans le mouvement varié, celle qui résulte de l'hypothèse d'un mouvement uniforme dans le parcours du chemin élémentaire ds, correspondant à un temps infiniment petit dt. On a ainsi

$$v = \frac{ds}{dt}:$$

en d'autres termes, *la vitesse est la dérivée de l'espace par rapport au temps.*

Lorsque s sera connu en fonction du temps, une simple différentiation donnera la vitesse qu'on obtiendra approximativement, dans tous les cas, en menant la tangente à la courbe ayant le temps pour abscisse et l'espace pour ordonnée; et l'on voit facilement que *le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente mesure la vitesse.*

8. *Vitesse angulaire.* — Concevons qu'un point parcoure un cercle de rayon r avec la vitesse v; tous les points du rayon r décrivant des arcs semblables, leurs vitesses sont proportionnelles à leurs distances au centre; de sorte que si v' est la vitesse de celui de ces points qui décrit la circonférence de rayon r', on a

$$\frac{v}{r} = \frac{v'}{r'}.$$

Ce rapport constant représente la vitesse ω du point du rayon situé à l'unité de distance du centre, et à laquelle on donne le nom de *vitesse angulaire du mouvement de rotation.*

Il suffit de connaître la vitesse angulaire pour définir le mouvement, puisque l'on a

$$v = \omega r, \quad v' = \omega r'.$$

Si θ représente la mesure de l'angle formé par le rayon mobile avec un certain rayon fixe pris pour origine des angles, on a

$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

puisque θ représente l'espace parcouru par le point situé à l'unité de distance du centre.

Revenons maintenant au cas général où le mobile décrit une trajectoire quelconque plane ou gauche. Soient m, m' deux positions consécutives du mobile; O un point du plan normal à l'élément mm'. Il est clair que l'on peut regarder le chemin mm' comme décrit par le mobile dans un mouvement circulaire autour du point O, considéré comme fixe, pendant le temps dt, avec la vitesse angulaire

$$\omega = \frac{mm'}{dt} \cdot \frac{1}{Om} = \frac{v}{Om}.$$

Mais comme, en général, tous les plans normaux à la courbe ne se couperont pas en un même point de l'espace, le point O ne pourra pas être considéré comme le centre d'une rotation continue. C'est pourquoi on dit que ω est une vitesse *angulaire instantanée* autour *du centre instantané* O.

9. *Détermination de l'espace parcouru connaissant la vitesse.*

Soient s_0 et s les espaces parcourus au bout des temps t_0 et t; on a

$$ds = v dt,$$

d'où

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} v dt,$$

et une intégration donnera l'espace s, lorsque v sera donnée en fonction du temps.

On pourra, dans tous les cas, obtenir, du moins approximativement, l'espace parcouru $s - s_0$ dans l'intervalle $t - t_0$, en calculant, au moyen d'une méthode connue de quadrature par approximation, l'aire de la courbe ayant le temps pour abscisse et la vitesse pour ordonnée, comprise entre les ordonnées correspondant aux abscisses t et t_0.

10. *Du mouvement uniformément varié.* — Le mouvement d'un point est *uniformément varié* quand la vitesse croît ou décroît de quantités proportionnelles au temps.

Ce mouvement est uniformément *accéléré* ou *retardé* selon que la vitesse augmente ou diminue.

La vitesse v dans le mouvement uniformément varié est donc représentée par une expression de la forme

$$v = v_0 \pm at, \tag{1}$$

v_0 étant la *vitesse initiale* ou relative au premier instant, a une constante positive qui représente la variation constante éprouvée par la vitesse au bout de chacune des unités de temps successives.

La constante a est en quelque sorte la *vitesse constante* avec laquelle le mouvement s'accélère ou se retarde, puisque l'on a

$$a = \pm \frac{v - v_0}{t},$$

et elle mesure ainsi l'*accélération* du mouvement. Nous lui donnerons le nom d'*accélération dans le sens du mouvement* pour un motif que nous ferons connaître plus loin, lorsque nous parlerons de l'accélération proprement dite, qui ne se confond avec elle que dans le cas particulier du mouvement rectiligne.

En remplaçant v par sa valeur $\frac{ds}{dt}$, dans la formule (1), on obtient l'équation

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \pm at,$$

dont l'intégration

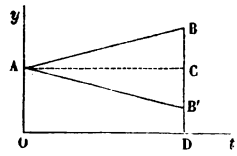
$$\frac{ds}{dt} = v_0 \pm at$$

donne, en supposant que l'origine des espaces corresponde à celle du temps,

$$(2) \qquad s = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$$

On peut arriver géométriquement à ce résultat en remarquant que l'équation (1) représente (*fig.* 1) une droite AB ou AB′ selon que le mouvement est uniformément accéléré ou retardé, dont v est l'ordonnée, t l'abscisse, l'ordonnée à l'origine OA étant v_0; AB et AB′ sont symétriquement situées par rapport à la parallèle AC à l'axe des abscisses, passant par le point A. Soient B, C, B′ les points de AB, AC, AB′ correspondant à l'abscisse OD $= t$; on a

Fig. 1.



$$CB = CB' = at, \quad CD = v_0,$$

et (9)

$$s = \text{aire ABDO} \quad \text{ou} \quad \text{aire AB}'\text{DO} = \text{aire ACDO} \pm \text{aire ABC},$$

et enfin

$$s = v_0 t \pm at \cdot \frac{t}{2} = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}.$$

Ainsi dans le mouvement uniformément varié, l'espace est une fonction du second degré du temps. La réciproque de cette proposition est évidemment vraie; car si

$$s = mt + nt^2,$$

m et n étant des constantes, on a, en différentiant,

$$\frac{ds}{dt} = v = m + 2nt,$$

et cette vitesse varie bien proportionnellement au temps.

11. La formule (2) peut, en ayant égard à la relation (1), se mettre sous la forme

$$s = t\left(\frac{v_0 \pm at}{2} + \frac{v_0}{2}\right) = t \cdot \frac{v + v_0}{2},$$

ce qui exprime que :

Dans le mouvement uniformément varié, le chemin parcouru dans un certain temps est le même que si le mobile eût été animé d'une vitesse constante égale à la demi-somme des vitesses initiale et finale effectives.

Si le mobile n'a pas de vitesse initiale ou part du repos, les formules (1) et (2) se réduisent à

$$v = at, \quad s = \frac{at^2}{2}.$$

Les vitesses sont proportionnelles aux temps écoulés et les espaces parcourus aux carrés de ces temps.

12. *Chute verticale des corps pesants dans le vide.* — La chute des corps pesants dans le vide offre pour chacun des points qui les constituent un exemple remarquable du mouvement rectiligne uniformément accéléré.

On a trouvé expérimentalement à Paris pour la valeur de la constante a, que l'on désigne ordinairement par l'initiale g du mot *gravité,* et qui représente la vitesse au bout de la première seconde, ou le double de l'espace parcouru dans le même intervalle de temps,

$$g = 9^{m},8088.$$

La constante g est aussi ce que l'on nomme *l'accélération de la gravité.*

Si donc un corps tombe dans le vide sans vitesse initiale, sa vitesse au bout du temps t sera

$$v = gt, \tag{3}$$

et la hauteur h qu'il aura parcourue dans sa chute verticale est

$$h = \frac{1}{2} g t^2, \tag{4}$$

d'où, par l'élimination de t entre (3) et (4),

$$v = \sqrt{2gh},$$

ce qui fait dire que $\sqrt{2gh}$ *est la vitesse due à la hauteur* h.

Les formules (3) et (4) permettent de résoudre une série de problèmes dont le lecteur trouvera facilement et les énoncés et les solutions. Nous ne ferons que la remarque suivante :

Au bout du temps $t + 1$ la hauteur de la chute est

$$h' = \frac{1}{2} g (t + 1)^2,$$

d'où, en retranchant de l'équation (4),

$$h' - h = \frac{1}{2} g (2t + 1).$$

Donc *les chemins parcourus dans les unités de temps successives, à partir du premier instant, sont entre eux comme les nombres impairs successifs.*

13. *Ascension des corps pesants dans le vide.* — Considérons le mouvement d'un corps pesant lancé verticalement de bas en haut dans le vide avec la vitesse initiale v_0. L'expérience prouve que les formules relatives au mouvement uniformément retardé sont applicables, et que

$$v = v_0 - gt, \quad h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Le mobile arrivera à sa plus grande hauteur lorsque la vitesse v sera nulle, ou au bout du temps $t = \frac{v_0}{g}$, ce qui donne

pour la hauteur maximum à laquelle il sera parvenu

$$h_1 = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g};$$

c'est pourquoi on nomme $\frac{v_0^2}{2g}$ *la hauteur due à la vitesse* v_0.

A partir de cet instant, le mobile tombera d'un mouvement uniformément accéléré, et il est facile de voir que la vitesse au bas de la chute sera précisément égale et contraire à la vitesse initiale v_0.

Il est nécessaire d'ajouter que, dans l'air et pour un mobile de dimensions ordinaires, la hauteur d'ascension et la vitesse acquise au bas de la chute seraient moindres que ne l'indiquent les formules à cause de ce qu'on appelle la *résistance du milieu*.

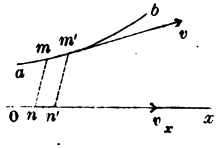
§ III. — De la Projection des Vitesses sur une droite ou un plan.

14. Nous représenterons graphiquement la vitesse d'un point mobile par une longueur proportionnelle à cette vitesse portée dans le sens du mouvement sur la tangente à la trajectoire, à partir du point de contact; on comprend dès lors ce que l'on doit entendre par la projection orthogonale ou oblique, d'une vitesse sur une droite ou un axe fixe.

Nous supposerons dans ce qui suit, à moins d'un avertissement spécial, que les projections sont orthogonales.

Soient m (*fig.* 2) la position actuelle du mobile sur sa trajectoire; mm' l'élément de chemin parcouru dans le temps dt; n, n' les projections de m et m' sur un axe fixe Ox; v la vitesse de m; v_x la vitesse de sa projection n. On a

Fig. 2.



$$mm' = v\,dt, \quad nn' = v_x\,dt.$$

Or $nn' = mm' \cos(x, v)$, en désignant par le symbole (x, v) l'angle formé par Ox avec mm'. On déduit de là

$$v_x = v \cos(x, v).$$

La projection orthogonale d'une vitesse sur un axe quelconque est ce que l'on nomme la vitesse du mobile, *estimée* suivant cet axe. On a donc cet énoncé : *La vitesse d'un point estimé suivant un axe est égale à la vitesse de la projection du point sur cet axe.*

On reconnaîtra sans peine que cet énoncé s'applique également aux projections obliques.

Si nous rapportons le mouvement du point à trois axes fixes rectangulaires Ox, Oy, Oz, on a, en appelant v_x, v_y, v_z les vitesses des projections du mobile sur ces trois axes,

$$v_x = v \cos(x, v), \quad v_y = v \cos(y, v), \quad v_z = v \cos(z, v),$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

La vitesse d'un point est donc complétement déterminée quand on connaît les vitesses des projections de ce point sur trois axes rectangulaires.

Si la trajectoire est plane et que l'on prenne son plan pour celui des xy, il vient

$$v_x = v \cos(x, v), \quad v_y = v \cos(y, v).$$

15. Si l'on considère le mouvement de la projection d'un point mobile sur un plan, on reconnaîtra sans difficulté, au moyen d'un raisonnement analogue au précédent, que *la vitesse de la projection du point est la projection de la vitesse de ce point sur le plan.*

Nous donnerons plus loin des applications des deux théorèmes que nous venons d'établir.

§ IV. — De la Composition des Vitesses simultanées.

16. Expliquons d'abord comment un point peut être considéré comme animé simultanément de plusieurs mouvements distincts. Concevons à cet effet une bille qui se meut sur un bateau, entraîné lui-même dans le mouvement d'une rivière. Le centre de cette bille possède à la fois : 1° le mouvement *relatif* dont elle est animée par rapport au bateau; 2° le mouvement rectiligne du bateau par rapport aux rives; 3° le mouvement que celles-ci possèdent en commun avec la terre autour de son axe et autour du soleil.

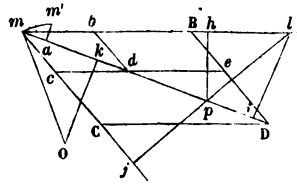
De tels mouvements sont dits relatifs ou indépendants, parce que, en effet, chacun d'eux est censé avoir lieu comme si tous les autres n'existaient pas.

Dans la question précédente, le mouvement réel ou absolu est appelé *mouvement résultant* des mouvements simultanés relatifs; ces derniers portent le nom de *mouvements composants*.

La vitesse du mouvement résultant est aussi la *résultante* des vitesses des autres mouvements considérés, et celles-ci en sont les *composantes*.

17. *La résultante de deux vitesses simultanées dont un point est animé, est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent ces vitesses.*

Fig. 3.



Supposons en premier lieu que le point m (*fig.* 3) soit animé de deux mouvements rectilignes et uniformes suivant les directions mB et mC.

Soient v la vitesse dont mB est la direction; v' la vitesse du mouvement suivant mC; on devra considérer le point m

comme se mouvant uniformément sur la droite mB avec la vitesse v, tandis que cette droite se déplace parallèlement à elle-même en s'appuyant par son extrémité m sur la direction mC, de manière que chacun de ses points soit animé d'un mouvement uniforme dont la vitesse est elle-même égale et parallèle à v'.

Supposons que le mobile partant de sa position initiale m soit arrivé en d au bout du temps t et que, par conséquent, la droite mB se soit transportée dans ce temps parallèlement à elle-même en cde; on a

$$mc = v't, \quad cd = vt,$$

d'où

$$\frac{mc}{cd} = \frac{v'}{v},$$

ce qui prouve 1° que le mobile se meut sur une droite mdD de direction déterminée; 2° que les chemins md, mD décrits sur cette droite sont proportionnels aux espaces correspondants mc, mC décrits sur mC; 3° que mB $= v$, mC $= v'$ représentant les chemins relatifs à l'unité de temps, mD sera pareillement le chemin décrit par le mobile pendant cette unité; 4° enfin, que si l'on nomme V la vitesse résultante, elle est représentée par la diagonale mD du parallélogramme mBCD construit sur mB et mC, ce qui est conforme à l'énoncé.

Deux mouvements simultanés et indépendants quelconques d'un point pouvant être supposés rectilignes et uniformes pendant un temps infiniment petit, il s'ensuit que la vitesse du mouvement résultant sera toujours représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent les vitesses composantes.

18. *Décomposition d'une vitesse en deux autres directions données.* — La vitesse V (*fig.* 3), représentée en grandeur et en direction par la droite mD, peut toujours

être considérée comme résultant de deux autres mouvements simultanés et indépendants suivant les directions données mB, mC; les vitesses $v = m$B, $v' = m$C de ces derniers, s'obtiendront en construisant le parallélogramme mBCD, dont la diagonale représente la vitesse du mouvement proposé.

19. *Relations algébriques entre deux vitesses et leur résultante.* — Le triangle mCD donne

$$V = \sqrt{v^2 + v'^2 + 2vv' \cos(v, v')},$$

$$\sin(V, v) = \frac{v'}{V} \sin(v, v'),$$

$$\sin(V, v') = \frac{v}{V} \sin(v, v'),$$

formules qui déterminent complétement V en grandeur et en direction et au moyen desquelles trois quelconques des éléments du triangle mcD étant donnés, pourvu qu'il y entre au moins un côté, on trouvera au besoin les trois autres.

Si les vitesses v et v' sont à angle droit, on a

$$V = \sqrt{v^2 + v'^2},$$

$$\sin(V, v) = \frac{v'}{\sqrt{v^2 + v'^2}},$$

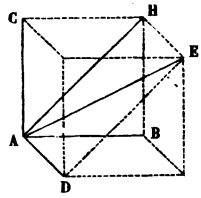
$$\cos(V, v) = \sin(V, v') = \frac{v}{\sqrt{v^2 + v'^2}}.$$

20. *La résultante de trois vitesses dont un point est animé simultanément est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites qui représentent ces trois vitesses.*

Soient (*fig.* 4) AB, AC, AD les droites qui représentent les trois composantes; la résultante des deux premières sera représentée par la diagonale AH du parallélogramme ABHC

qui leur correspond. La résultante de cette vitesse AH et de la troisième vitesse AD, ou la résultante des trois vitesses proposées, sera représentée par la diagonale AE du parallélogramme ADEH, c'est-à-dire par la diagonale du parallélipipède construit sur les droites AB, AC, AD; ce qui prouve aussi que l'on arrive bien au même résultat, quel que soit l'ordre dans lequel on effectue la composition des vitesses.

Fig. 4.



Réciproquement, on peut décomposer une vitesse connue en grandeur et en direction en trois autres de directions données. Il suffit, en effet, de construire sur les trois directions un parallélipipède dont la diagonale soit la droite qui représente la vitesse proposée. D'ailleurs la géométrie descriptive indique des méthodes très-simples pour effectuer la construction à l'aide de deux plans de projection, comme on le verra plus généralement ci-après.

21. *Relations entre trois vitesses rectangulaires et leur résultante.* — Si V est la résultante des trois vitesses rectangulaires v, v', v'', la *fig.* 4 donne évidemment

$$V = \sqrt{v^2 + v'^2 + v''^2},$$

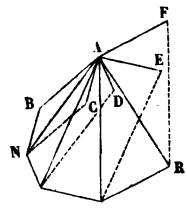
$$\cos(V, v) = \frac{v}{V}, \quad \cos(V, v') = \frac{v'}{V'}, \quad \cos(V, v'') = \frac{v''}{V},$$

formules qui déterminent complétement V en grandeur et en direction.

22. *Composition d'un nombre quelconque de vitesses simultanées.* — Soient (*fig.* 5) AB, AC, AD, AE, AF, les droites qui représentent ces vitesses en grandeur et en direction. Composons d'abord les deux premières, puis leur résultante AN avec la troisième, la résultante de ces deux

dernières avec la quatrième, et ainsi de suite. On arrive de cette manière à la résultante AR de toutes les vitesses composantes; et du tracé de la figure on déduit le théorème :

Fig. 5.



La résultante d'un nombre quelconque de vitesses est représentée en grandeur et en direction par le dernier côté de la ligne polygonale formée par des droites respectivement égales et parallèles à celles qui représentent les composantes, et de même sens.

23. En considérant la projection des vitesses et de leur polygone sur un plan quelconque, on en tire immédiatement cette conséquence, qui conduit à une construction très-simple de la résultante dans l'espace.

La projection de la résultante sur un plan est la résultante des projections des vitesses composantes.

24. Dans le cas particulier où les vitesses sont dirigées suivant la même droite, leur résultante est égale à la somme algébrique de ces vitesses, en considérant comme positives celles qui ont un certain sens et négatives celles qui ont un sens contraire.

25. Du théorème du n° 22 et d'un théorème connu en géométrie, on déduit le suivant :

La résultante d'un nombre quelconque de vitesses, estimée ou projetée sur un axe donné, est égale à la somme algébrique des vitesses composantes estimées suivant le même axe.

Maintenant il est facile de voir que, quel que soit l'ordre dans lequel on compose les vitesses, on arrivera toujours au même résultat; car, quel que soit aussi le mode de composition successive de ces vitesses, la somme de leurs projec-

tions sur un axe quelconque en est complétement indépendante, et, par conséquent, on obtiendra toujours une même résultante dont la grandeur et la direction seront ainsi complétement déterminées par ses projections sur trois axes arbitraires.

26. — *Détermination algébrique de la résultante d'un nombre quelconque de vitesses.* — Rapportons les vitesses composantes v, v', v'',... et leur résultante V à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz passant par un même point O. Le théorème 25 donne

$$(A)\quad \begin{cases} V\cos(x, V) = v\cos(x, v) + v'\cos(x, v') + \ldots, \\ V\cos(y, V) = v\cos(y, v) + v'\cos(y, v') + \ldots, \\ V\cos(z, V) = v\cos(z, v) + v'\cos(z, v') + \ldots. \end{cases}$$

Appelant X, Y, Z, les sommes algébriques des vitesses composantes projetées sur les trois axes Ox, Oy, Oz, on a les relations

$$V = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$(B)\quad \cos(x, V) = \frac{X}{V}, \quad \cos(y, V) = \frac{Y}{V}, \quad \cos(z, V) = \frac{Z}{V},$$

qui déterminent complétement V en grandeur et en direction.

Si les vitesses sont situées dans un même plan, on a, en prenant ce plan pour celui des xy, les formules plus simples,

$$V = \sqrt{X^2 + Y^2},$$

$$\cos(x, V) = \frac{X}{V}, \quad \sin(x, V) = \frac{Y}{V}.$$

Enfin il est facile de reconnaître, à l'inspection des formules (A), que l'on peut décomposer d'une infinité de manières différentes une vitesse en plus de trois autres de directions données.

27. *Digression sur les sommes et les différences géométriques.* — Si, pour exprimer que la vitesse V est le dernier côté du polygone formé par les lignes qui représentent v, v', v'', ... en grandeur, en direction et en sens, nous nous servons de la notation symbolique

$$(a) \qquad \overline{V} = \overline{v} + \overline{v'} + \overline{v''} \ldots,$$

nous dirons avec M. de Saint-Venant que V est la *somme géométrique* des longueurs v, v', v'', ... La *différence géométrique* de V et v, ou l'*excès géométrique* de la ligne V sur la ligne v, sera la ligne w, qui, ajoutée géométriquement à v, donnera V, et nous écrirons

$$(b) \qquad \overline{w} = \overline{V} - \overline{v}.$$

La résultante des vitesses v, v', v'', ... avec la vitesse u étant la même que celle de V et de u, on a

$$(c) \qquad \overline{V} + \overline{u} = \overline{v} + \overline{v'} + \overline{v''} + \ldots + \overline{u}.$$

En prenant u en sens contraire, on aurait

$$(d) \qquad \overline{V} - \overline{u} = \overline{v} + \overline{v'} + \overline{v''} \ldots - \overline{u}.$$

Les formules symboliques telles que (a), (b), (c), (d) ont reçu le nom d'*équations géométriques linéaires*, et l'on voit, 1° que l'on peut ajouter ou retrancher une même quantité aux deux membres d'une pareille équation ; 2° que l'on peut faire passer un terme d'un membre dans un autre, pourvu qu'on en change le signe.

Les équations géométriques linéaires, dont nous étudierons à mesure les propriétés, nous seront fort utiles plus tard comme moyen de simplifier les démonstrations.

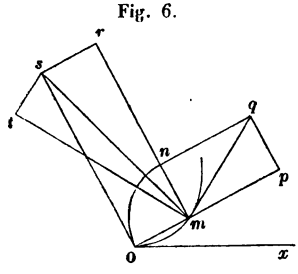
§ V. — Application de la Composition des Vitesses a la géométrie.

28. *Méthode de Roberval pour mener les tangentes aux courbes.* — On doit à Roberval une méthode basée sur la composition des vitesses, pour construire la tangente aux courbes dont la génération est susceptible d'être définie par le mouvement d'un point, lorsque ce mouvement peut être considéré comme résultant de la composition de deux ou plusieurs mouvements simultanés dans lesquels les rapports entre les grandeurs et les directions des vitesses sont connus.

Nous allons faire connaître cette méthode en l'appliquant à quelques exemples.

1° *Mener la tangente en un point de la spirale d'Archimède.* — Soient (*fig.* 6) Ox l'axe polaire, m un point de la courbe, r le rayon Om, θ l'angle qu'il forme avec Ox, $r = a\theta$ l'équation de la courbe a étant une longueur constante. La courbe peut être considérée comme engendrée par un point m, mobile sur le rayon Om qui tourne autour du point O avec la vitesse angulaire constante ω, la vitesse de m suivant ce rayon étant $a\omega$. Le point m est donc animé simultanément de deux vitesses $a\omega$ et $r\omega$, proportionnelles à a et r, dirigées respectivement suivant le prolongement de Om et de la perpendiculaire mn à cette direction. La tangente à la courbe est, par suite, la diagonale mq du rectangle construit sur $mp = a$ et $mn = r$.

Fig. 6.



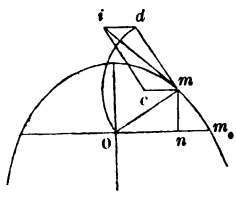
Si l'on conçoit que l'on fasse tourner le rectangle $nmpq$ de 90° autour du point m de la droite vers la gauche, mn

viendra se placer suivant mO, mq deviendra la normale, et nq la sous-normale à la courbe; et, comme nq a une longueur constante égale à a, on voit que : *Dans la spirale d'Archimède la sous-normale est constante.*

La même méthode permet de construire la tangente à toute courbe polaire définie par son équation $r = f(\theta)$; car cette courbe peut être considérée comme engendrée par un point mobile suivant le rayon vecteur avec la vitesse $\frac{dr}{dt}$, rayon tournant lui-même autour du pôle avec la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$. Le point m étant ainsi animé de deux vitesses simultanées $\frac{dr}{dt}$ et $r\frac{d\theta}{dt}$ suivant le rayon vecteur et perpendiculairement à ce rayon, la tangente à la courbe s'obtiendra en traçant la diagonale du rectangle construit sur les longueurs $\frac{dr}{d\theta}$ et r portées sur les directions de ces vitesses auxquelles elles sont proportionnelles. On déduit de là que la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente à la courbe avec le rayon vecteur a pour expression $\frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$, ce qui est conforme au résultat donné par l'analyse.

2° *Mener la tangente à la quadratrice.* — Cette courbe a été inventée par Dinostrate dans le vain but d'arriver à la quadrature du cercle. Elle est engendrée (*fig.* 7) par un point m, mobile le long d'une droite Om qui tourne autour d'un point O, de telle manière que l'angle mOm_0 formé par ce rayon avec sa position initiale Om_0 est à l'angle droit comme la distance nm_0 des positions actuelle et initiale du mobile, en projection sur le rayon correspondant à cette dernière, est à la

Fig. 7.



longueur de ce même rayon ; en d'autres termes, on a

$$nm_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \widehat{mOm_0} \times Om_0.$$

Il est clair que le point m se déplace comme s'il était animé simultanément du mouvement de n parallèlement à $m_0 n$ et du mouvement qu'il prendrait s'il restait immobile sur le rayon Om. Or rien ne s'opposant à ce que l'on considère le mouvement de rotation de Om autour du point O comme ayant lieu avec une vitesse angulaire constante ω, on a

$$\widehat{mOm_0} = \omega t,$$

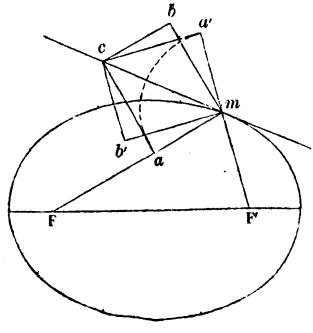
et la vitesse constante du point n a pour valeur

$$\frac{nm_0}{t} = \frac{2}{\pi} \cdot Om_0 \cdot \omega.$$

La vitesse du point m, considéré comme appartenant au rayon Oa, étant $\omega . Om$, on aura la direction de la vitesse du point mobile m ou de la tangente à la courbe, en traçant la diagonale mi du parallélogramme construit sur la perpendiculaire $md = Om$ à Oa et la parallèle $mc = \frac{2}{\pi} \cdot Om_0 = 0,6366\, Om_0$ à Om_0, qui sont proportionnelles aux deux vitesses composantes du point m.

3° *Mener la tangente en un point donné des courbes du second degré.* — Soient (*fig.* 8) F et F′ les deux foyers d'une ellipse que nous considérerons comme la trajectoire d'un point mobile m. La somme des longueurs mF et mF′ étant constante, mF se raccourcit ou s'allonge d'une longueur égale à celle dont mF′ s'allonge ou se raccourcit. Il résulte de là que la vi-

Fig. 8.



tesse du point m est la diagonale mc, commune à deux parallélogrammes : l'un construit sur une vitesse $V = ma$ suivant mF, dirigée, par exemple, de m vers F, et sur la vitesse mb, résultant de la rotation du rayon vecteur autour du foyer; l'autre sur une vitesse ma' égale à V, dirigée suivant le prolongement de $F'm$, et sur la vitesse rotatoire mb' de m autour de F'.

Ces deux parallélogrammes $cbma$, $cb'ma'$ sont donc égaux comme ayant même diagonale et un côté égal, et leur diagonale commune ou la tangente à la courbe est par suite également inclinée sur les côtés égaux à V, et divise ainsi en deux parties égales l'angle formé par l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre.

En employant le même raisonnement, on arrivera facilement à prouver que la tangente en un point de l'hyperbole est la bissectrice de l'angle formé par les rayons vecteurs focaux, et que la tangente à la parabole divise en parties égales l'angle compris sous le rayon vecteur mené du foyer et la perpendiculaire abaissée sur la directrice.

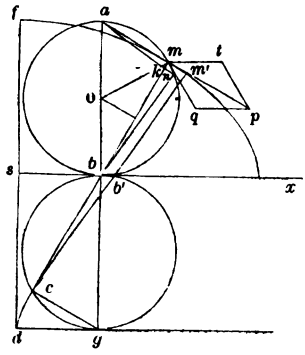
4° *Mener la tangente à la cycloïde.* — Comme dernier exemple de la méthode de Roberval, nous allons chercher à construire la tangente à la cycloïde. On sait que cette courbe est engendrée par un point d'une circonférence de cercle qui *roule* sur une droite située dans son plan, c'est-à-dire qui se meut de manière que ses éléments consécutifs viennent successivement se mettre en contact avec les éléments consécutifs de la droite. Cette courbe se compose d'une infinité d'arceaux correspondant chacun à une révolution complète du cercle générateur, reliés entre eux par des points de rebroussement situés sur la droite directrice. Nous ne considérerons que l'un de ces arceaux dans ce qui va suivre.

On reconnaîtra facilement que le chemin parcouru par le centre de la circonférence, parallèlement à la droite, est

égal à l'arc correspondant décrit autour de ce centre, pendant le même temps, par un point déterminé de cette circonférence. On peut par suite considérer tout déplacement fini de la circonférence comme résultant de deux mouvements simultanés, l'un commun à tous ses points parallèles à la droite directrice, l'autre de rotation autour du centre avec une vitesse à la circonférence égale à la vitesse relative au premier mouvement. On peut de plus supposer que ces deux mouvements sont uniformes.

Cela posé, soient (*fig.* 9) m la position du point décrivant, ω et R la vitesse angulaire autour de son centre et le rayon du cercle générateur, c la longueur de la corde qui joint le point m au point de contact b de la circonférence avec la droite directrice bx, $mt = mq$ les droites, respectivement parallèles à bx et perpendiculaires au rayon mO, qui représentent les vitesses simultanées des mouvements composants du point m; mp la résultante de ces deux vitesses dont la direction est celle de la tangente à la courbe. Les deux triangles isocèles mtp, mOb étant semblables comme ayant leurs côtés égaux respectivement perpendiculaires, il s'ensuit, 1° que la vitesse mp ou *la tangente à la cycloïde est perpendiculaire à la corde mb*, ou dirigée suivant la corde complémentaire am; ou encore, que la normale passe par le point de contact de la circonférence avec la droite directrice; 2° que la vitesse mp est représentée par ωc.

Fig. 9.



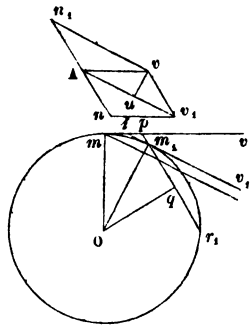
CHAPITRE DEUXIÈME.

DE L'ACCÉLÉRATION ET DE SES PROPRIÉTÉS.

§ Ier. — De l'Accélération.

29. Concevons que par un point A (*fig.* 10) on mène deux droites Av, Av_1 qui représentent, en grandeur et en direction, les vitesses v, $v + dv$ que possède un point mobile au commencement et à la fin du temps élémentaire dt, et soient m et m_1 les positions correspondantes du mobile. On peut considérer la vitesse $v + dv$ comme la résultante de v et d'une autre vitesse représentée par An qui est du même ordre de grandeur que dt.

Fig. 10.



Ainsi, au bout du temps dt, la vitesse se compose de la vitesse v et de la vitesse A$n = du$ qui est en quelque sorte la vitesse *acquise* ou *gagnée* dans le temps dt ; et c'est à l'intervention de cette dernière vitesse que l'on doit attribuer la modification qu'éprouve le mouvement entre m et m_1. C'est pourquoi on lui donne le nom d'*accélération élémentaire,* en réservant l'expression unique d'*accélération* à la variation éprouvée par la vitesse rapportée à l'unité de temps, ou à $\varphi = \frac{du}{dt}$.

Si le mouvement est rectiligne, An est égal à dv, et l'ac-

célération est la *dérivée de la vitesse* par rapport au temps; d'où il suit que dans le mouvement rectiligne uniformément varié l'accélération est la constante qui multiplie le temps dans l'expression de la vitesse (*).

Si l'accélération s'annulait à partir de la position m du mobile, ce dernier, au lieu d'arriver en m_1 au bout du temps dt, parcourrait sur la tangente en m l'espace $mp = vdt$; de sorte que pm_1, qui est une quantité du second ordre, représente la déviation, par rapport au mouvement rectiligne, due à l'accélération.

L'accélération φ pouvant être supposée constante en grandeur et en direction pendant l'élément du temps dt, le chemin m_1p, parcouru en vertu de l'accélération φ et pendant le temps dt, est le résultat d'un mouvement uniformément varié et a pour expression $\varphi \frac{dt^2}{2}$ (13), en négligeant ainsi les termes du troisième ordre. Nous donnerons plus loin une démonstration directe de ce théorème.

30. *Remarque relative aux différentielles et aux intégrales géométriques.* — D'après la définition que nous venons de donner de l'accélération et les considérations que nous avons exposées relativement aux sommes géométriques, on voit que l'accélération élémentaire est ce que l'on peut appeler la *différentielle géométrique de la vitesse*,

---

(*) La force étant définie par la loi de l'inertie (*voir* mes *Éléments de Mécanique*), on voit que l'effet qu'elle produit sur un point matériel dans le temps dt, n'est autre chose que l'accélération élémentaire. Or nous ne pouvons nous faire une idée des causes qu'en comparant entre eux les effets qu'elles produisent, en tenant compte des circonstances dans lesquelles elles agissent. Si donc on pose en principe que l'*effet produit par une force est indépendant de la vitesse acquise par le point sur lequel elle s'exerce*, on est conduit à considérer les intensités de deux forces comme proportionnelles aux accélérations élémentaires qu'elles produiraient successivement dans un même élément du temps sur un point matériel; ce qui revient à dire qu'elles sont entre elles comme les accélérations finies correspondantes.

On déduit de là la définition du poids d'un point matériel, de la masse mesurée par le rapport du poids à l'accélération de la gravité, etc.

et l'accélération finie, *la dérivée géométrique de la vitesse* par rapport au temps. Nous adopterons pour représenter ces deux quantités les notations symboliques $\overline{dv}$, $\overline{\frac{dv}{dt}}$.

Concevons que par un point A on mène des droites qui représentent en grandeur et en direction les vitesses que prend successivement le mobile et que l'on joigne leurs extrémités par un trait continu; soient v, v' les vitesses correspondant au commencement et à la fin d'un certain intervalle fini t, représentées par $\overline{Av}$, $\overline{Av'}$. La longueur de l'arc $\overline{vv'}$ de la courbe formée par les extrémités de ces droites sera égale à la somme des accélérations élémentaires pour l'intervalle considéré.

La corde de cet arc, ou l'accroissement géométrique u de la vitesse, ou encore la *vitesse gagnée* pendant le temps t, sera *l'intégrale géométrique* de l'accélération élémentaire.

On peut donc écrire symboliquement

$$\overline{v} - \overline{v'} = \overline{u} = \int_0^t \overline{\varphi\, dt}.$$

31. Si l'on désigne par v_x, v'_x, u_x, φ_x, les projections de v, v', u, φ sur un axe quelconque, il est clair que l'on a la relation

$$v_x - v'_x = u_x = \int_0^t \varphi_x\, dt,$$

d'où ce théorème :

En projection sur un axe, l'accroissement de la vitesse, ou la vitesse géométriquement gagnée pendant un certain intervalle, est égal à la somme algébrique correspondante des accélérations élémentaires (*).

(*) On déduit de là, en multipliant les deux termes de l'équation par la masse, le principe relatif aux projections des quantités de mouvement et des impulsions des forces sur un axe, principe que l'on étend sans peine aux systèmes matériels soumis à leurs actions et réactions mutuelles, ainsi qu'à des forces extérieures. (*Voyez* mes *Éléments de Mécanique*.)

32. *De l'accélération dans le mouvement circulaire uniforme.* — Soient (*fig.* 10, p. 24) O le centre du cercle, R son rayon; de ce que $\overline{A\nu_1} = \overline{A\nu}$, $\overline{\nu\nu_1}$ ou φdt doit être considéré comme perpendiculaire à ν : en d'autres termes, l'accélération est constamment dirigée vers le centre du cercle. Les deux triangles isocèles, $\nu A \nu_1$ et mOm_1, semblables entre eux comme ayant même angle au sommet, donnent

$$\overline{\nu\nu_1} = \frac{\overline{A\nu}}{mO} \cdot mm_1 = \frac{v}{R} \cdot \nu dt,$$

d'où, pour l'accélération,

$$\varphi = \frac{\overline{\nu\nu_1}}{dt} = \frac{v^2}{R}.$$

En appelant ω la vitesse angulaire, on a

$$v = \omega R,$$

par suite

$$\varphi = \omega^2 R.$$

Donc, *dans le mouvement circulaire uniforme, l'accélération est dirigée vers le centre, et est égale au carré de la vitesse divisé par le rayon du cercle, ou au carré de la vitesse angulaire multiplié par le rayon.*

33. *Des accélérations planétaires.* — La Lune et les autres satellites des planètes décrivent librement dans le vide et d'un mouvement à très-peu près uniforme des orbites sensiblement circulaires dont le centre se confond avec celui de la planète. Or, d'après une loi découverte par Képler, *les carrés des temps des révolutions complètes des satellites d'une même planète sont entre eux comme les cubes des rayons de leurs orbites.* Si donc T et T′ désignent les durées des révolutions de deux de ces satellites, R et R′ les rayons des orbites correspondantes, on a

$$\frac{T^2}{T'^2} = \frac{R^3}{R'^3}.$$

Les vitesses angulaires étant $\frac{2\pi}{T}$, $\frac{2\pi}{T'}$, il en résulte que les deux astres considérés possèdent respectivement les deux accélérations φ et φ' dirigées vers les centres des planètes correspondantes et données par

$$\varphi = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot R, \quad \varphi' = \frac{4\pi^2}{T'^2} \cdot R',$$

d'où

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{T'^2}{T^2} = \frac{R'^2}{R^2};$$

et l'on arrive à cette loi découverte par Newton : *Les accélérations centrales des satellites d'une même planète varient en raison inverse des carrés de leurs distances à cette planète.*

34. *Vérification dans le cas spécial de la Lune et de la Terre.* — La Lune décrivant, tous les $27^j\,322 = 39344 \times 60^s$, une circonférence de cercle dont le rayon R est 60 fois celui r de la Terre, qui elle-même, comme on le sait, a une circonférence de $40\,000\,000^m$, on aura pour calculer le rapport de l'accélération g' de la Lune à la valeur moyenne $g = 9{,}809$ de la gravité terrestre, et en rapportant le temps à la seconde,

$$\frac{g'}{g} = \frac{4\pi^2 R}{g T^2} = \frac{2\pi \times 2\pi r}{g \times 60 \times (39344)^2},$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{1}{3624} = \frac{r^2}{R^2} \text{ environ},$$

ce qui prouve que les accélérations sont sensiblement entre elles comme les carrés des distances au centre de la Terre.

On arrive au même résultat, en remarquant, avec Newton, que le centre de la Lune décrit en une minute un arc de 61020 mètres dont le sinus verse $4^m{,}87$ représente l'espace qu'il décrit d'un mouvement uniformément varié sous l'accélération g', pendant une minute, en s'éloignant de la tangente. Cet espace étant à peu près égal à celui $\frac{1}{2}g = 4^m{,}9044$

que parcourent verticalement dans le vide les corps pesants, à la surface de la Terre dans la première seconde de leur chute, et les espaces croissant d'ailleurs comme les carrés des temps, on est conduit au même résultat que ci-dessus relativement au rapport de g à g'.

35. *De l'accélération dans le mouvement elliptique du centre des planètes autour du centre du Soleil comme foyer.* — Les planètes dans leur mouvement autour du Soleil obéissent aux trois lois suivantes, que Képler a déduites de l'observation.

Première loi. — *Chaque planète parcourt dans un plan passant par le centre du Soleil et autour de cet astre une orbite dans laquelle le rayon vecteur qui joint les centres du Soleil et de la planète, décrit des aires proportionnelles aux temps.*

Deuxième loi. — *Les courbes décrites par les planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers.*

Sous le rapport de l'excentricité de leurs orbites, les planètes peuvent se ranger de la manière suivante :

1° Deux entre la *Terre* (excent = 0,017) et *Uranus* (excent = 0,047), savoir : *Concordia* (excent = 0,041) et *Harmonia* (excent = 0,046);

2° Neuf entre *Saturne* (0,056) et *Mars* (0,093). Leurs excentricités sont comprises entre celles 0,066, 0,090 de *Nemausa* et *Vesta;*

3° Quarante-quatre entre *Mars* et *Mercure* (0,205), dont les excentricités ont pour limites 0,0996 (*Parténope*) et 0,202 (*Hébé*);

4° Enfin, seize qui ont des excentricités supérieures à celles de *Mercure* et comprises entre les limites 0,209 (*Isis*) et 0,338 (*Polymnie*). Celle qui a la plus forte excentricité après *Polymnie* est *Atalante* (0,298).

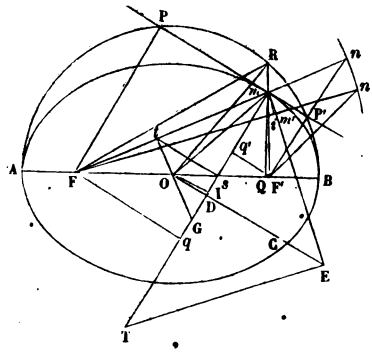
Troisième loi. — *Les carrés des temps des révolutions des planètes autour du Soleil sont proportionnels aux cubes des grands axes de leurs orbites.*

Nous allons nous proposer, en partant de ces lois, de dé-

terminer les divers éléments du mouvement des planètes.

Soient F (*fig.* 11) le foyer de l'ellipse occupé par le Soleil, F′ l'autre foyer; $FP = p$, $F'P' = p'$ les perpendiculaires abaissées des foyers de l'ellipse sur la tangente au point m de l'orbite, qui représente la position actuelle du centre de la planète mobile de m vers m'; m' la position de la planète au bout du temps dt; a et b le grand axe et le petit axe de l'ellipse; T la durée de la révolution complète de la planète; $v = \frac{mm'}{dt}$ la vitesse au point m. L'aire mFm' décrite autour du foyer F dans le temps dt ayant pour valeur

Fig. 11.



$$\frac{mm'.FP}{2} = \frac{FP.v.dt}{2},$$

on a

$$\frac{\frac{p.vdt}{2}}{\pi ab} = \frac{dt}{T},$$

d'où, en posant pour abréger $c = \frac{\pi ab}{T}$,

$$v = \frac{2c}{p}.$$

Ainsi *la vitesse varie en raison inverse de sa distance au centre du Soleil.*

Ce théorème ne dépend pas de la forme de la courbe et suppose seulement que la première loi de Képler a lieu.

Soient ω la vitesse angulaire de mF autour de F; r le rayon vecteur mF; $mi = \omega r dt$ la perpendiculaire abaissée de m sur $m'F$; les triangles semblables mim', FPm donnent

$$\frac{mi}{mm'} = \frac{FP}{mF}, \quad \text{d'où} \quad vp = \omega r^2,$$

et, en ayant égard à la valeur précédente de v,

$$\omega = \frac{2c}{r^2},$$

de sorte que *la vitesse angulaire du rayon vecteur autour du foyer varie en raison inverse du carré de sa longueur.*

On voit de cette manière que les deux premières lois de Képler permettent d'obtenir avec la plus grande facilité, la vitesse v de la planète sur son orbite et la vitesse angulaire de son rayon autour du foyer; que l'une et l'autre de ces vitesses ont la plus grande valeur au *périhélie* ou *périgée*, et la plus faible à l'*aphélie* ou *apogée*, et qu'entre ces deux extrêmes elles oscillent en quelque sorte périodiquement en repassant constamment par les mêmes valeurs pour les mêmes positions symétriques.

Occupons-nous maintenant de la recherche de l'accélération; soient n, n' les points de rencontre de Fm et Fm' prolongés avec le cercle de centre F et de rayon $2a$; on sait que les points F′, P′, n sont en ligne droite et que $\mathrm{F}'n = 2\mathrm{F}'\mathrm{P}'$. D'autre part on a, d'après une propriété connue de l'ellipse,

$$\mathrm{FP}.\mathrm{F}'\mathrm{P}' \quad \text{ou} \quad pp' = b^2,$$

par suite

$$v = \frac{2c}{b^2}\cdot \mathrm{F}'\mathrm{P}' = \frac{c}{b^2}\cdot \mathrm{F}'n.$$

De sorte que, à part le facteur constant $\frac{c}{b^2}$, F′n représente la vitesse v à laquelle on aurait fait subir un quart de révolution de droite à gauche.

Il suit de là que $\frac{c}{b^2}\cdot nn'$ représente en grandeur l'accélération élémentaire au point m et que cette accélération est dirigée suivant mF de m vers F.

Si l'on remarque que $nn' = 2a.\omega dt = \frac{4ac}{r^2}dt$, il vient pour l'accélération cherchée

$$\varphi = \frac{c}{b^2}\cdot\frac{4ac}{r^2} = 4\pi^2\frac{a^3}{\mathrm{T}^2}\cdot\frac{1}{r^2}.$$

Donc, *dans le mouvement elliptique d'une planète autour du centre du Soleil, l'accélération est dirigée vers le centre et varie en raison inverse du carré de la distance ou du rayon vecteur* (*).

On arriverait au même résultat en considérant l'hyperbole ou la parabole au lieu de l'ellipse.

Si l'on remarque que, d'après la troisième loi de Képler, $\frac{T^2}{a^3}$ est une constante, pour toutes les planètes, on a ce théorème :

Les accélérations relatives à deux planètes quelconques en mouvement autour du Soleil sont en raison inverse des carrés de leurs distances respectives au centre de cet astre.

Proposons-nous maintenant de trouver les expressions des coordonnées polaires du centre de la planète, en fonction du temps.

Soient mQ la perpendiculaire abaissée du point m sur le grand axe de l'ellipse; R le point de rencontre de son prolongement avec le cercle décrit sur cet axe comme diamètre; O le centre de l'ellipse; u l'angle ROA formé par le rayon OR avec le demi grand axe qui correspond au périhélie A, angle auquel on donne le nom d'*anomalie excentrique*; r le rayon vecteur Fm; θ l'angle formé par r avec FA; e l'excentricité de l'ellipse.

On a

$$OF = ea,$$
$$OQ = -a\cos u,$$
$$FQ = OF + OQ = a(e - \cos u) = -r\cos\theta,$$
$$mQ = \frac{b^2}{a}RQ = \sqrt{1-e^2}.RQ = a\sqrt{1-e^2}\sin u.$$

L'équation polaire de l'ellipse est, en prenant OA pour

(*) Ainsi, la nature nous offre un exemple d'accélération variable, ce qui conduit naturellement à considérer en mécanique des forces d'intensité variable.

partie positive de l'axe fixe,

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},$$

d'où

$$(1) \qquad r + er\cos\theta = a(1-e^2)$$

ou

$$r - e\,\mathrm{FQ} = a(1-e^2),$$

$$r - ae(e-\cos u) = a(1-e^2).$$

De là on tire

$$(2) \qquad r = a(1-e\cos u)$$

et en portant cette valeur dans (1)

$$(3) \qquad \cos\theta = -\frac{e-\cos u}{1-e\cos u};$$

on obtient ainsi les coordonnées d'un point de l'orbite en fonction de l'anomalie excentrique.

Pour avoir le temps en fonction de la même variable, il suffit de calculer l'aire AmF en fonction de u, puisqu'elle est proportionnelle au temps. Remarquons pour cela que

$$\begin{aligned}\text{aire AF}m &= \text{aire A}m\text{Q} - \text{aire }m\text{FQ}\\ &= \sqrt{1+e^2}\,\text{aire ARQ} - \frac{\mathrm{FQ}.m\mathrm{Q}}{2}.\end{aligned}$$

Or

$$\text{aire ARQ} = \text{aire AOR} + \text{aire ORQ} = \frac{a^2u - a^2\sin u\cos u}{2},$$

$$\frac{\mathrm{FQ}.m\mathrm{Q}}{2} = \frac{a^2}{2}\sqrt{1-e^2}\,(e-\cos u)\sin u,$$

par suite

$$\text{aire AF}m = \frac{a^2}{2}\sqrt{1-e^2}\,(u - e\sin u),$$

et enfin

$$\frac{\frac{a^2}{2}\sqrt{1-e^2}\cdot(u-e\sin u)}{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}=\frac{t}{T},$$

d'où, en appelant n la *vitesse angulaire moyenne* $\frac{2\pi}{T}$ du du rayon vecteur,

$$u = nt + e\sin u. \tag{4}$$

On aura généralement une approximation suffisante en négligeant le carré de e, ce qui revient à écrire

$$u = nt + e\sin(nt + e\sin u) = nt + e\sin nt,$$

par suite on aura, avec la même approximation,

$$r = a(1 - e\cos nt),$$
$$\cos\theta = -(e - \cos u)(1 + e\cos u)$$
$$= \cos u - e\sin^2 u = \cos nt - 2e\sin^2 nt.$$

Posant

$$\theta = nt + \delta,$$

δ étant du même ordre de grandeur que e, il vient en continuant la même approximation ou en supposant $\cos\delta = 1$, $\sin\delta = \delta$,

$$\delta = 2e\sin nt,$$

d'où

$$\theta = nt + 2e\sin nt:$$

$2e\sin nt$ est ce que l'on nomme l'*équation du centre*. Nous n'insisterons pas sur l'utilité de ces formules, dont on comprendra l'importance en consultant les traités spéciaux d'Astronomie.

§ II. — De la Projection de l'Accélération sur un Axe.

36. La projection de l'accélération élémentaire sur un axe fixe étant égale à la différence des projections des vitesses v et $v + dv$ sur le même axe, il en résulte qu'elle est représentée par la différentielle dv_x de la vitesse v estimée suivant cet axe. On a par suite pour la projection φ_x de l'accélération φ

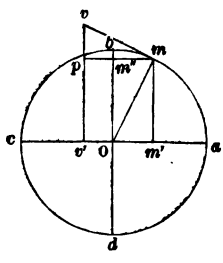
$$\varphi_x = \frac{dv_x}{dt}.$$

Et comme (n° 29) $\frac{dv_x}{dt}$ représente l'accélération de la projection du mobile considérée elle-même comme un véritable mobile, l'on a ce théorème :

La projection de l'accélération sur un axe est la dérivée, par rapport au temps, de la vitesse estimée suivant cet axe et représente l'accélération de la projection du mobile sur l'axe.

37. *Application aux mouvements oscillatoires.* — Considérons un point m (*fig.* 12) animé d'un mouvement circulaire uniforme qui ait lieu, par exemple, de la droite vers la gauche; soient R le rayon Oa du cercle, ω la vitesse angulaire, $v = \overline{mv} = \omega R$ la vitesse du point m; a le point de la circonférence que l'on considère comme origine des espaces; bOd le diamètre du cercle perpendiculaire à Oa.

Fig. 12.



Proposons-nous de trouver la vitesse et l'accélération de la projection m' du point m sur le diamètre aOc. Soient v' la projection de la vitesse v sur Oa, p la projection du point m

sur la droite $\overline{vv'}$; $x = Om'$, $y = mm'$ les coordonnées du point m.

Les triangles semblables vmp, mOm' donnent pour la vitesse $\overline{m'v'} = v'$ du point m'

$$v' = v\frac{mm'}{Om} = \omega . mm' = \omega . y.$$

La vitesse v', nulle au point a, va en croissant jusqu'en O, où elle atteint son maximum ωR, puis diminue jusqu'en c, où elle est nulle; le mobile rétrograde alors de c vers a, en présentant dans la loi des vitesses les mêmes phases que ci-dessus.

Quant à l'accélération du point m', ou la projection de l'accélération ω^2.R dirigée de m vers O sur Oa, elle est représentée par $\omega^2 x$, et est dirigée de m' vers O. Ainsi, *dans le mouvement oscillatoire du point m' entre les positions a et c pour lesquelles la vitesse devient nulle, l'accélération est proportionnelle à la distance du mobile au centre du cercle, et est dirigée constamment vers ce centre, de sorte qu'elle est négative ou positive, selon qu'il y a rapprochement ou écartement.*

La durée d'une double oscillation du point m' ou d'une révolution complète du point m est donnée par la formule

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

qui est indépendante du rayon du cercle.

Si, en désignant par k une constante, un point se meut sur une droite et que son accélération kx dirigée vers un point fixe de cette droite soit proportionnelle à la distance x du mobile à ce point, il est clair que la loi du mouvement de ce mobile sera la même que celle de la projection, sur une droite, d'un point se mouvant uniformément sur un cercle avec une vitesse angulaire égale à $\sqrt{k}$, le rayon de ce cercle étant défini par la position du mobile, correspondant à une vitesse nulle.

De sorte que l'on aura pour la durée d'une oscillation complète

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{k}}.$$

Remarque. — L'angle ωt, formé au bout du temps t par le rayon Om avec Oa, pourra se composer d'un certain nombre de circonférences augmenté de l'angle mOa. Dans tous les cas on aura

$$x = R\cos\omega t, \quad y = R\sin\omega t.$$

La vitesse de m' sera

$$v' = \omega R\sin\omega t = \sqrt{k}.R\sin\sqrt{k}.t.$$

La vitesse v'' de la projection m'' de m sur Oa sera de même

$$v'' = \omega R\cos\omega t = \sqrt{k}.R\sin\sqrt{k}.t.$$

Les accélérations φ' et φ'' de m' et m'' seront enfin exprimées par

$$\varphi' = \omega^2 R\cos\omega t = k R\cos\sqrt{k}\,t,$$

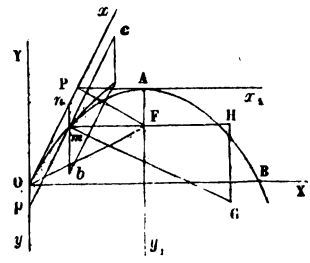
$$\varphi'' = \omega^2 R\sin\omega t = k R\sin\sqrt{k}\,t.$$

Les mouvements oscillatoires de m' et m'' sont identiques, mais les époques relatives aux maxima et minima de l'un correspondent à celles qui sont relatives aux minima et maxima de l'autre. On peut donc dire que ce sont deux mouvements oscillatoires de même nature, mais inverses, et que tout mouvement circulaire peut être considéré comme résultant de deux mouvements périodiques rectilignes identiques, mais inverses, dont les directions sont rectangulaires.

38. *Du mouvement parabolique des projectiles dans le vide.* — Soit m (*fig.* 13) la position au bout du temps t d'un point pesant lancé du point O avec la vitesse initiale v,

dans la direction Ox, et proposons-nous de déterminer la nature de la courbe décrite par ce mobile, en le supposant uniquement soumis à l'accélération g de la pesanteur.

Fig. 13.



Menons la verticale Oy passant par le point O ; il est clair que la trajectoire sera contenue dans le plan xOy, car la projection de g sur la perpendiculaire en O au plan xOy étant nulle, la vitesse de la projection de m sur cette droite est constante et, par suite, nulle comme à l'origine du temps.

Soient O$n = x$, O$p = y$, les ordonnées du point m par rapport au système d'axes Ox, Oy. L'accélération de la projection oblique p de m étant constante et égale à g, le mouvement de ce point est uniformément varié, et comme sa vitesse initiale est nulle, on a

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

Par une raison analogue, l'accélération de n étant nulle, on a

$$x = v_0 t,$$

et en éliminant t entre ces deux relations, il vient

$$x^2 = 4\frac{v_0^2}{2g}\cdot y,$$

équation d'une parabole dont le paramètre relatif au diamètre Oy est le *quadruple de la hauteur* due à la vitesse initiale du mobile.

Pour obtenir le foyer F de cette courbe, il suffit de chercher le point d'intersection, situé dans l'angle xOy, du cercle de centre O et d'un rayon égal à $\frac{v_0^2}{2g}$, avec la droite OF qui fait avec le prolongement Oy un angle égal à celui que forme

la même droite avec Ox. Soient Fy_1 le diamètre principal de la parabole, P la projection orthogonale de F sur Ox ; le sommet A s'obtiendra par l'intersection de Fy_1 avec la perpendiculaire abaissée du point P sur sa direction.

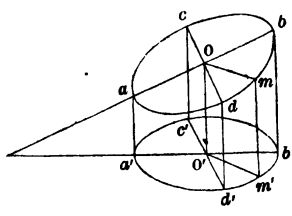
On déterminera la vitesse du point m et, par suite, la tangente au même point en traçant la diagonale du parallélogramme construit sur les droites $mc = v_0$, et $mb = \frac{gt^2}{2} = \frac{gx^2}{2v_0^2}$ respectivement parallèles à Ox et Oy qui représentent les vitesses de n et p.

§ III. — De la Projection de l'Accélération sur un Plan.

39. De ce que la vitesse d'un point mobile, en projection sur un plan, est la vitesse de la projection du mobile sur ce plan, on conclut facilement que le même théorème a lieu pour les accélérations.

40. *Projection sur un plan d'un mouvement circulaire uniforme.* — La projection orthogonale, sur un plan quelconque, d'un cercle de rayon a parcouru uniformément par un mobile m (*fig.* 14) avec une vitesse $v = a\omega$ est, comme on le sait, une ellipse dont le centre O′ est la projection de celui O du cercle, et d'après un théorème de géométrie, *les aires décrites par le rayon vecteur r allant du centre de l'ellipse à la projection m′ du mobile sont proportionnelles aux aires correpondantes du cercle.* Donc aussi *elles sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.*

Fig. 14.



Cela posé, nommons ψ la projection sur le plan de l'ac-

célération $\varphi = \omega^2 a$ dans le cercle, projection à laquelle est nécessairement dû le mouvement elliptique; c l'aire décrite par le rayon vecteur r dans l'unité de temps; $2b$ le petit axe de l'orbite de m' dont le grand axe est $2a$; T la durée d'une révolution complète des points m et m'; le cosinus de l'angle formé par les plans du cercle et de l'ellipse étant $\frac{b}{a}$, on a

$$cT = \pi . ab, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

et l'on voit ainsi : 1° *que l'accélération* ψ *dans le mouvement elliptique est dirigée vers le centre de l'ellipse;* 2° *qu'elle est proportionnelle à* r, *et a pour valeur*

$$\psi = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = \frac{4c^2}{a^2 b^2} \cdot r;$$

3° *que, comme pour les attractions planétaires, les vitesses sont en raison inverse de leurs distances au centre de l'ellipse.*

Supposons que l'on compte le temps à partir du moment où le point m se trouve à l'une des extrémités d du diamètre cd du cercle, parallèle à l'intersection de son plan avec celui de l'ellipse, la position correspondante de m' étant le sommet d' du grand axe de l'ellipse. Soient y l'ordonné du point m' par rapport au diamètre $c'd'$, x l'abscisse correspondante; le triangle $m'O'd'$ a pour mesure $\frac{a.y}{2}$, le triangle mOd, $\frac{a^2}{2} \sin \omega t$, et comme l'un est la projection de l'autre, on a

$$\frac{ay}{2} = \frac{a^2}{2} \sin \omega t \cdot \frac{b}{a},$$

d'où

$$y = b \sin \omega t.$$

L'équation de l'ellipse étant

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

il vient

$$x = a\cos\omega t.$$

Le rayon r a pour valeur

$$r = \sqrt{b^2\sin^2\omega t + a^2\cos^2\omega t}$$

et l'angle θ qu'il forme avec l'axe $2a$ est donné par

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{b}{a}\operatorname{tang}\omega t.$$

On peut conclure de ce qui précède que réciproquement, si un mobile parcourt une ellipse en vertu d'une vitesse initiale et d'une accélération dirigée vers le centre de cette ellipse : 1° cette accélération est nécessairement proportionnelle au rayon vecteur correspondant; 2° les aires décrites par ce même rayon sont entre elles comme les temps respectivement écoulés.

41. Il n'est pas moins évident que si un point se meut en vertu d'une accélération $\psi = kr$ dirigée constamment vers un point fixe O′ et proportionnelle à la distance r à ce centre, il ne peut, sous une vitesse initiale donnée, que décrire une ellipse comprise dans le plan commun à ce centre, à cette vitesse v_0 et au rayon vecteur r_0 relatifs à la position initiale mobile. Il suffit pour cela de remarquer que les éléments d'une telle orbite sont par là même connus, aussi bien que le cercle de l'espace dont elle est la projection sur le plan.

En effet, nommant p_0 la perpendiculaire abaissée du centre O′ sur la direction tangentielle de la vitesse v_0 et conservant toutes les notations précédentes, on a

$$c = \frac{1}{2}p_0v_0, \quad \omega^2 = k = \frac{4\pi^2}{T^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}, \quad \pi ab = cT,$$

d'où

$$ab = \frac{p_0 v_0}{\sqrt{k}},$$

ce qui démontre en particulier que la durée T de la révolution est indépendante des circonstances initiales du mouvement.

Remarquons en outre que, la connaissance de r_0 et de v_0, en grandeur et en direction, entraînant celle de l'un des diamètres $2r_0$ de la courbe et la direction de son conjugué 2γ, on a par la propriété du parallélogramme circonscrit

$$\gamma p_0 = ab = \frac{2c}{\sqrt{k}} = \frac{p_0 v_0}{\sqrt{k}},$$

d'où

$$\gamma = \frac{v_0}{\sqrt{k}}.$$

Ce qui fixe tous les éléments de la trajectoire elliptique, le cercle circonscrit, etc.

§ IV. — De la Composition des Accélérations.

42. Le problème que nous nous proposons de résoudre est celui-ci :

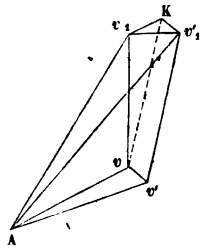
Connaissant en grandeur et en direction les accélérations relatives à plusieurs mouvements simultanés dont un point mobile est animé, déterminer l'accélération du mouvement résultant.

Cette dernière accélération est appelée la *résultante* des accélérations relatives aux mouvements composants, et celles-ci sont dites les *composantes* de la première.

43. *Composition de deux accélérations.* — Soient $\overline{Av}$, $\overline{vv_1}$ (*fig.* 15) les droites qui représentent actuellement en

grandeur et en direction les vitesses v, v_1 des deux mouvements composants; la vitesse résultante sera représentée par $\overline{Av_1}$. Au bout du temps dt, les vitesses v et v_1 ont varié en grandeur et en direction, et si $\overline{Av'}$, $\overline{v'v'_1}$ sont les droites qui les représentent à cet instant, leur résultante sera Av'_1.

Fig. 15.



Appelant φ et φ' les accélérations des mouvements composants, ψ l'accélération du mouvement résultant, on a

$$\overline{vv'} = \varphi dt, \quad \overline{v_1v'_1} = \psi dt.$$

et en menant v'_1K égale et parallèle à vv'

$$\overline{v_1K} = \varphi' dt, \quad v'_1K = vv' = \varphi dt.$$

Les longueurs $\overline{v'v'_1}$, v'_1K, v_1K étant respectivement proportionnelles aux accélérations ψ, φ, φ', on en conclut ce théorème :

La résultante de deux accélérations est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les droites qui représentent les accélérations composantes (*).

Ce théorème étant tout à fait identique à celui qui concerne la composition des vitesses, la composition et la décomposition des accélérations s'effectuent comme pour

(*) Si l'accélération d'un point matériel se compose de plusieurs autres, on peut considérer la force qui la produit comme la résultante géométrique des forces qui produiraient les accélérations composantes en agissant isolément sur le même mobile; et en admettant la réciproque comme évidente, les principes relatifs à la composition des forces se trouvent démontrés.

Deux forces égales, de sens contraire, agissant suivant la même direction sur un point matériel, ne produisent aucune accélération, ou ne modifient pas son état de repos ou de mouvement, et réciproquement. On déduit de là le moyen de comparer les forces aux poids à l'aide du dynamomètre, etc. (*Voyez* mes *Éléments de Mécanique*.)

ces vitesses; et les relations algébriques qui existent entre des vitesses composantes et leur résultante subsistent également pour les accélérations.

Ces résultats auraient pu être considérés comme évidents à priori, puisque les accélérations simultanées élémentaires d'un point sont de véritables vitesses qui doivent se composer et se décomposer absolument comme les vitesses simultanées ordinaires.

44. *Remarque relative aux équations géométriques linéaires.* — La composition des vitesses donne

$$\overline{V} = \overline{v} + \overline{v'} + \overline{v''} + \ldots,$$

celle des accélérations

$$\overline{dV} = \overline{dv} + \overline{dv'} + \ldots,$$

$$\frac{\overline{dV}}{dt} = \frac{\overline{dv}}{dt} + \frac{\overline{dv'}}{dt} + \ldots,$$

d'où il suit que l'on peut différentier géométriquement, terme à terme, les deux membres d'une équation géométrique linéaire.

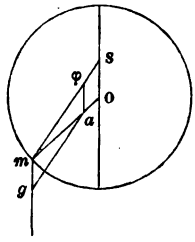
Plus généralement, comme la démonstration du n° 43 ne suppose pas que $\overline{vv'}$, $\overline{v_1 v'_1}$ soient infiniment petits, on peut dire que l'on peut retrancher membre à membre deux équations géométriques.

45. Comme première application de la composition des accélérations, proposons-nous de *trouver l'accélération* φ *que devrait posséder un point mobile pesant m, en sus de celle de la pesanteur, pour que son mouvement fût circulaire et uniforme.*

Soient ω (*fig.* 16) la vitesse angulaire constante du point m; $r = mO$ le rayon du cercle; ma la droite qui représente l'accélération $\omega^2 r$ dirigée vers O à laquelle il faut donner

lieu, en composant l'accélération g avec l'accélération inconnue φ, représentée elle-même par $\overline{m\varphi}$.

Fig. 16.



Il résulte de ce qui précède que la droite $\overline{m\varphi}$ doit être l'un des côtés d'un parallélogramme dont $\overline{mg} = g$ serait le côté adjacent et ma la diagonale; de sorte que $\overline{m\varphi}$ est égale et parallèle à $\overline{ag}$.

Soit S le point de rencontre de la direction de φ avec la verticale du point O; on a, par la similitude des triangles,

$$OS = \overline{a\varphi} . \times \frac{mO}{ma} = g . \frac{r}{\omega^2 r} = \frac{g}{\omega^2},$$

$$\varphi = mS . \frac{ma}{mO} = \omega^2 . mS.$$

Ce qui prouve : 1° *que l'accélération cherchée est dirigée constamment vers un point fixe* S *situé sur la verticale du centre du cercle;* 2° *que cette accélération est proportionnelle à la distance du mobile à ce point, qui joue en quelque sorte le rôle de centre d'attraction.*

46. *Des accélérations normale et tangentielle.*—Soient β l'angle que forme l'accélération φ d'un point m (*fig.* 10, p. 24) avec la direction de sa vitesse v; $\overline{vu}$ la perpendiculaire abaissée du point v sur la direction $\overline{Av_1}$ de la vitesse au bout du temps dt. L'accélération φ peut être considérée comme la résultante de l'*accélération tangentielle*

$$\varphi \cos\beta = \frac{\overline{v_1 u}}{dt},$$

estimée dans le sens du mouvement, et de l'*accélération normale*

$$\varphi \sin\beta = \frac{\overline{vu}}{dt},$$

dirigée vers le centre de courbure de la trajectoire.

Or on a évidemment

$$\overline{v_1 u} = dv,$$

par suite

$$\varphi \cos\beta = \frac{dv}{dt}.$$

Cette accélération aura le même sens que la vitesse ou un sens inverse, selon que cette vitesse ira en croissant ou en décroissant.

Soient O le centre de la courbure de la trajectoire en m; $d\alpha$ l'angle de contingence de cette courbe ou l'angle des vitesses $v = \overline{A v}$ et $v + dv = \overline{A v_1}$, égal à celui des normales O m, O m_1. L'accélération élémentaire normale $\overline{vu}$ a pour expression

$$\overline{vu} = v d\alpha$$

et par suite

$$\varphi \sin\beta = v \frac{d\alpha}{dt}.$$

Nous rappellerons ici que $\frac{d\alpha}{dt}$ est la *vitesse angulaire du point mobile* autour du centre de courbure.

Si nous désignons par ρ le rayon de courbure m de la trajectoire, nous aurons

$$mm' = \rho d\alpha, \quad v = \frac{mm'}{dt}, \quad \rho = \frac{mm'}{d\alpha}$$

et enfin

$$\varphi \sin\beta = \frac{v^2}{\rho} = \rho \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2.$$

On a donc ce théorème :

L'accélération d'un point mobile se compose d'une accélération tangentielle ou dirigée dans le sens du mouvement, égale à la dérivée de la vitesse par rapport au temps, et d'une accélération normale dirigée vers le centre de courbure égale au carré de la vitesse divisé par le rayon de

courbure, ou au produit de ce rayon par le carré de la vitesse angulaire autour du centre de courbure (*).

Cet énoncé comprend comme cas particulier celui qui est relatif au mouvement circulaire uniforme dont nous nous sommes occupés plus haut.

47. *Remarque.* — On voit, d'après ce qui précède, que l'accélération tangentielle n'a d'autre effet que de modifier la vitesse en grandeur; l'accélération normale ne produit elle-même que la courbure de la trajectoire. Si donc la loi de l'accélération tangentielle est connue, celle des vitesses et celle des espaces parcourus s'en déduiront indépendamment de la courbure de la trajectoire et absolument comme si celle-ci était développée suivant une ligne droite.

On déduit notamment de là, en se reportant au n° 37, que si un point m décrit une courbe en vertu d'une accélération dont la composante tangentielle soit proportionnelle à l'arc s de cette courbe compris entre la position du mobile et un point déterminé A de la courbe, le point m oscillera de part et d'autre du point A; et qu'en représentant par ks l'accélération tangentielle, la durée d'une oscillation complète sera donnée par

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

Enfin les arcs parcourus à droite et à gauche du point A seront égaux en longueur.

48. *Remarque relative au mouvement d'un point sur une courbe ou surface fixe.* — Supposons qu'un mobile ne décrive plus librement sa trajectoire en vertu d'une accélération φ, mais qu'il soit assujetti à glisser le long d'une

(*) En multipliant par la masse, on obtient les composantes normale et tangentielle de la force.

courbe de forme donnée; soient φ' et φ'' les composantes de φ dirigées suivant la tangente et le plan normal à la courbe; φ' définira la vitesse et par suite la loi du mouvement; et de là résultera la connaissance de l'accélération normale $\frac{v^2}{\rho}$ généralement distincte en grandeur et en direction de la composante φ'' dont il n'existe plus ainsi aucune trace. C'est pourquoi on dit que cette dernière est *détruite* ou *neutralisée* par la courbe fixe. Nous aurons bientôt l'occasion de tenir compte de cette remarque, qui est également applicable au cas où le mobile serait assujetti à glisser sur une surface fixe.

49. Soient $m_1 r_1$ (*fig.* 10, p. 24) la corde interceptée dans le cercle osculateur en m, par la parallèle menée du point m_1 à l'accélération φ; q le milieu de cette corde; on a, en posant $m_1 r_1 = 2c$,

$$\rho \sin \beta = c,$$

par suite

$$\varphi = \frac{v^2}{\rho \sin \beta} = \frac{v^2}{c}.$$

Donc *l'accélération d'un point est égale au carré de la vitesse divisé par la moitié de la corde du cercle osculateur, menée parallèlement à cette accélération par la position du mobile.*

50. Si, à un instant donné, φ, au lieu de varier, restait constante en grandeur et en direction, le mobile décrirait une parabole qui aurait un contact du second ordre avec la trajectoire du mobile. Le paramètre de cette parabole étant $4\frac{v^2}{2\varphi}$ (38), et $m_1 r_1$ la direction du diamètre conjugué à la tangente $\overline{mv}$, on a cet énoncé, en remarquant que

$$4 \cdot \frac{v^2}{2\varphi} = 2c.$$

Dans la parabole, la corde interceptée par le cercle osculateur sur le diamètre correspondant au même point, est égale au paramètre relatif à ce diamètre, théorème dû à Maclaurin et qui détermine immédiatement ce cercle par un procédé graphique simple.

On peut dire aussi que le paramètre est égal au double de la projection du rayon de courbure ρ sur le diamètre correspondant. Or si l'on se reporte au n° 38 (*fig.* 13), le rayon vecteur mF, mené du foyer au point m, est égal au quart de ce paramètre; d'un autre côté la normale mG divise en deux parties égales l'angle formé par le diamètre en m avec mF : on a donc

$$2\rho\cos \mathrm{G}m\mathrm{F} = 4m\mathrm{F}, \quad \text{d'où} \quad \rho\cos \mathrm{G}m\mathrm{F} = 2m\mathrm{F},$$

en d'autres termes, *le centre de courbure* G *de la parabole se projette sur le prolongement du rayon vecteur en un point* H *distant du foyer d'une longueur égale à ce rayon.*

51. Soit p (*fig.* 10, p. 24) le point de rencontre de la direction de la vitesse avec le prolongement de $m_1 r_1$, $m_1 p$ étant la déviation due à l'accélération; on a $mp = v\,dt$ et

$$m_1 p = \frac{\overline{mp}^2}{pr_1} = \frac{v^2 dt^2}{2c} = \varphi \frac{dt^2}{2};$$

ce qui est conforme à ce que nous avons vu plus haut.

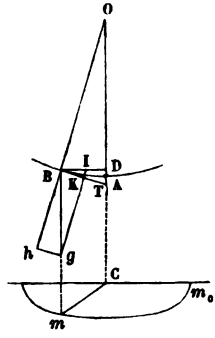
52. On peut considérer v comme la résultante de $v + dv$ et d'une vitesse égale et contraire à $du = \mathrm{A}n$ représentée par $\mathrm{A}n_1$ (*fig.* 10, p. 24). Sous ce nouveau point de vue, cette dernière composante est la vitesse *perdue* dans le temps dt, ou l'accélération élémentaire qu'il faudrait imprimer au mobile au deuxième instant lorsque sa vitesse est devenue $v + dv$, afin de le ramener à la direction primitive $\overline{\mathrm{A}v}$ du mouvement. Cette accélération est dirigée en dehors de la courbe par rapport au centre de courbure.

Elle peut également être décomposée en accélérations normale et tangentielle de même grandeur que celles dont nous nous sommes occupés plus haut, auxquelles elles sont égales et directement opposées ; et l'on comprend facilement comment dans l'une et l'autre manière de voir les composantes normales sont respectivement nommées *centrifuge* et *centripète*.

§ V. — Application de la Composition des Accélérations.

53. *Du pendule simple.* — On sait que le pendule simple se compose d'un fil de longueur invariable $AO = l$ (*fig.* 17), fixé en un point O et terminé par un corps pesant A, dont les dimensions sont assez petites pour qu'on puisse le considérer, sans erreur sensible, comme un véritable point.

Fig. 17.



On met le pendule en jeu en l'écartant de la verticale OA du point de suspension et l'abandonnant ensuite à lui-même sans lui imprimer de vitesse initiale ; il oscille alors dans un même plan de part et d'autre de cette verticale, et c'est la loi de ces oscillations que nous nous proposons de trouver.

Soient B une position quelconque du mobile ; $\overline{Bg}$ la droite qui représente en grandeur et en direction l'accélération g de la pesanteur ; T le point où la tangente en B à la trajectoire circulaire décrite par ce point coupe la verticale du point de suspension.

L'accélération g peut être décomposée en deux autres : l'une Bh, dirigée suivant le prolongement du fil BO, qui est détruite par ce fil dont l'inextensibilité hypothétique s'oppose à tout déplacement de B suivant sa direction;

l'autre tangentielle Bk, dirigée suivant BT et dont la valeur résultant de la similitude des triangles BKg, OBT est

$$BK = \overline{Bg} \cdot \frac{BT}{BO} = \frac{g}{l} \cdot BT.$$

Si l'on suppose que l'angle qui mesure l'écart initial ou la *demi-amplitude* du pendule ne dépasse pas quelques degrés, on peut considérer, avec une grande approximation, l'arc BA comme étant égal à la tangente BT. De là et du n° 47 on déduit que le pendule oscillera symétriquement de part et d'autre de la verticale OA et que la durée d'une oscillation a pour valeur

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

On voit de cette manière que la durée des oscillations est la même pour toutes les amplitudes qui ne dépassent pas quelques degrés ; d'où le nom de *pendule isochrone* donné au pendule à petites oscillations. Mais il faut, pour que l'isochronisme ait lieu, que l'amplitude des oscillations ne dépasse pas 20°.

De là aussi on tire

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

formule qui sert à calculer d'une manière très-précise l'accélération g en différents lieux de la terre par le nombre d'oscillations exécutées dans un temps donné.

54. *Pendule à oscillations elliptiques.* — Supposons que le pendule écarté d'une petite quantité de la verticale du point de suspension, au lieu d'être abandonné à la libre action de la pesanteur, reçoive une vitesse initiale v_0 dans une direction horizontale perpendiculaire au plan vertical d'écartement : il exécutera autour de la verticale de suspension des oscillations coniques d'une faible amplitude dont la loi peut être déterminée d'une manière très-simple. Soit, en effet (*fig.* 17), C le point de rencontre de cette verticale

avec un plan horizontal sur lequel le point B se projette en m. L'accélération du point B se composera, comme ci-dessus, de $\frac{g}{l} \cdot$ BT dirigée suivant BT, et d'une accélération dirigée suivant OB, différente de Bh (48), dont la valeur, qui ne peut résulter que de la loi du mouvement, est par conséquent une inconnue du problème. Mais comme l'angle BOA est très-petit, la projection de cette dernière sur le plan horizontal mC peut être négligée, et l'accélération du point m se réduit à la projection $\frac{g}{l} m$C de $\frac{g}{l} m$T, dirigée suivant le rayon mC.

Le point m, ayant pour vitesse initiale v_0, possède donc une accélération dirigée vers le point O et proportionnelle à la distance à ce point ; et il décrit par cela même (41) une ellipse dont la position initiale m_0 est l'un des sommets.

La durée du parcours total de l'ellipse ou de l'oscillation complète du pendule se déduira du n° 41 en y supposant $k = \frac{g}{l}$, et l'on trouve ainsi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ce qui indique que la durée des révolutions coniques et à base elliptique exécutées symétriquement et périodiquement autour de la verticale de suspension est la même que celle de la double oscillation du pendule ordinaire de même longueur l.

D'après le numéro précité, on a, pour le demi-axe b de l'ellipse, perpendiculaire à celui a qui correspond au point m_0, $b = v_0 \sqrt{\frac{l}{g}}$, et selon que v_0 sera plus petit ou plus grand que $\overline{Cm^0} \sqrt{\frac{l}{g}}$, m_0 sera un sommet du grand ou du petit axe.

Si $v_0 = \overline{Cm_0} \sqrt{\frac{g}{l}}$, la courbe devient un cercle, ce qui est

une conséquence immédiate de la question qui va nous occuper (*).

55. *Pendule conique.* — Cherchons si, après avoir écarté le pendule OB de la verticale OC d'un certain angle, il n'est pas possible de lui imprimer une vitesse horizontale v_0 perpendiculaire au plan d'écartement, capable de lui faire décrire un cercle horizontal sous l'influence de l'accélération g de la pesanteur.

Soient (*fig.* 17, p. 50) $BD = r$ le rayon de ce cercle, H la hauteur OD ; l'accélération g se décompose en deux autres, l'une $\overline{gI}$ dirigée suivant OB et qui est détruite par le fil, l'autre BI qui doit produire le mouvement circulaire. On a donc

$$BI = \frac{v_0^2}{r},$$

et comme les triangles semblables IBg, OBD donnent

$$BI = \frac{r \cdot g}{H},$$

il en résulte

$$v_0 = r\sqrt{\frac{g}{H}},$$

la vitesse angulaire du point B étant ainsi représentée par $\sqrt{\frac{g}{H}}$.

La durée T d'une révolution du pendule est donnée par

$$T = \frac{2\pi r}{v_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{H}}} = 2\pi\sqrt{\frac{H}{g}},$$

c'est-à-dire qu'elle est la même que celle de la double oscillation à faible amplitude d'un pendule de longueur H.

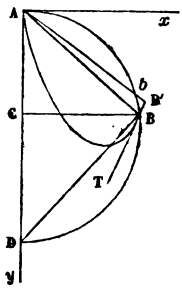
(*) *Voyez* les Notes I et II placées à la fin du volume, respectivement relatives au mouvement sur une surface et au mouvement pendulaire.

Si l'écart est très-petit, on peut prendre $H = l$, et $v_0 = r\sqrt{\frac{g}{l}}$, ce qui est conforme à ce que l'on a vu plus haut.

L'appareil dont nous venons de donner le principe abstrait et qui a été l'objet des recherches de Huygens est employé dans l'industrie comme régulateur des machines sous le nom de *pendule conique* ou *à force centrifuge*.

56. *Mouvement d'un point pesant sur un plan ou une droite inclinée* AB (*fig.* 18). — Soient i l'angle d'inclinaison ABC de cette droite sur l'horizontale ou base BC; $AB = L$ l'espace parcouru au bout du temps t par le mobile supposé partant du repos en A; $H = AC$ la hauteur verticale correspondante. L'accélération g se décompose en deux autres : l'une $g \cos i$, perpendiculaire à AB, n'aura pas d'influence sur le mouvement; l'autre $g \sin i$, parallèle à ce plan, aura tout son effet; et comme elle est constante, elle produira un mouvement uniformément accéléré : d'où l'on déduit, en remarquant que $H = L \sin i$,

Fig. 18.



$$V = g \sin i . t, \qquad L = \frac{1}{2} g \sin i . t^2,$$

$$V = \sqrt{2g . L \sin i} = \sqrt{2gH}.$$

Cette dernière équation montre que *la vitesse acquise au bas du plan incliné est la même que si le mobile était tombé librement de la hauteur verticale* AC *du plan, et qu'elle est absolument indépendante de sa longueur.*

Si dans le plan ABC j'élève à AB, au point B, la perpendiculaire BD, limitée en D, à la verticale AC prolongée en conséquence, on a $L = AD \sin i$, et la seconde des équations

ci-dessus donne

$$t = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{AD}}{g}}.$$

Cette expression ne dépendant que de AD, *il s'ensuit que le mobile partant du repos en* A *mettra le même temps pour parcourir toutes les cordes issues de ce point et terminées à la même circonférence de cercle décrite sur la verticale* AD *comme diamètre.*

Il est d'ailleurs facile de s'assurer que ce temps est égal à celui qu'emploierait le mobile à parcourir toutes les cordes, telles que BD, supplémentaires de celles dont on vient de parler.

Ces élégants théorèmes sont dus à Galilée.

57. *Détermination du rayon de courbure de certaines courbes à l'aide de la considération des accélérations.* — Si l'on peut considérer une courbe comme décrite par un point mobile dont la loi de la vitesse et de l'accélération est connue, on obtient le rayon de courbure de cette courbe en divisant le carré de la vitesse par la composante normale de l'accélération.

Cette méthode nous a déjà permis de trouver (50) le rayon de courbure de la parabole; nous allons donner maintenant quelques autres exemples de ce genre de recherches.

1° *Rayon de courbure de la spirale d'Archimède.* — Soient, comme au n° 28, $r = a\theta$ l'équation de la courbe; m l'un de ses points (*fig.* 6, p. 19); $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire supposée uniforme du rayon Om autour du point O. Nous avons vu que le point m pouvait être considéré comme animé des deux vitesses $a\omega$ suivant r, et ωr perpendiculaire au rayon vecteur.

La première vitesse donne l'accélération $a\omega^2$, perpendiculaire à r, comme on s'en assure en considérant deux positions infiniment voisines du point mobile.

Si r restait constant, la vitesse ωr donnerait l'accélération $\omega^2 r$ dirigée de m vers O; mais comme il varie, on a de

plus l'accélération $\omega \frac{dr}{dt} = \omega^2 a$, perpendiculaire à r. De sorte que, en résumé, l'accélération de m se réduit aux composantes $\omega^2 r$, $2\,\omega^2 a$, dirigées suivant le rayon vecteur et perpendiculairement à ce rayon.

Soient ms la diagonale du rectangle construit sur r et $\overline{mr} = 2a$, $\overline{mt}$ sa projection sur la normale. L'accélération normale en m étant $\omega^2 \overline{mt}$ et la vitesse $\omega . \overline{mq}$, le rayon de courbure sera donné par

$$\rho = \frac{\overline{mq}^2}{\overline{mT}}$$

et on l'obtiendra par une construction très-simple.

On trouverait de la même manière le rayon de courbure de la quadratrice.

2° *Rayon de courbure de l'ellipse.* — On peut, comme nous l'avons vu (41), considérer l'ellipse comme engendrée par un point mobile partant de l'une des extrémités d'un axe principal a avec une vitesse v_0, dont l'accélération kr, dirigée vers le centre, est proportionnelle au rayon vecteur r mené de ce point au mobile, l'autre demi-axe b étant lié à v_0 et à k par la relation

$$b = \frac{v_0}{\sqrt{k}}.$$

Soient p la projection de r sur la normale, ou, si l'on veut, la distance du centre à la tangente; ρ le rayon de courbure de l'ellipse; v la vitesse correspondante du mobile; l'accélération normale étant kp, on a

$$\frac{v^2}{\rho} = kp$$

et comme (41) $vp = v_0 a$, il vient, en éliminant v et k,

$$\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}.$$

Soient OC (*fig.* 11, p. 30) le demi-diamètre conjugué à Om; mD $= p$ la perpendiculaire abaissée de m sur OC; on

sait que $ab = \mathrm{OC} \times m\mathrm{D} = \mathrm{OC}.p$, par suite

$$\rho = \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2}{m\mathrm{D}}.$$

Je porte sur le prolongement de OC, à partir du point C, CE = OD; et je détermine le point de rencontre T de mD prolongée avec la perpendiculaire en E à mE; on a

$$\mathrm{DT} = \frac{\overline{\mathrm{DE}}^2}{m\mathrm{D}} = \frac{\overline{\mathrm{OC}}^2}{m\mathrm{D}} = \rho,$$

et en prenant sur mT, à partir de m, la longueur mG = DT, on obtient le centre de courbure G de l'ellipse.

On peut arriver d'une autre manière au rayon de courbure de l'ellipse en considérant cette courbe comme décrite par un point m dont l'accélération dirigée vers un foyer F varierait en raison inverse du carré du rayon vecteur $r = \mathrm{F}m$ (n° 35). Soit α l'angle de la normale avec le rayon vecteur; on a

$$p = r\cos\alpha, \quad v = \frac{2c}{r\cos\alpha}.$$

L'accélération normale étant $\frac{4ac^2}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \cos\alpha$, il vient, en l'égalant à $\frac{4c^2}{r^2\cos^2\alpha.\rho}$,

$$\rho = \frac{b^2}{a\cos^3\alpha}.$$

Appelant r' le rayon vecteur partant de l'autre foyer, on a

$$r\cos\alpha.r'\cos\alpha = b^2, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{rr'}{a\cos\alpha}.$$

Or, la portion ms de la normale, déterminée par le grand axe de l'ellipse, déduite de la similitude des triangles Fms, FnF', a pour expression

$$ms = \frac{\mathrm{F}m.\mathrm{F}'m}{\mathrm{F}n} = \frac{rr'\cos\alpha}{a}, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{ms}{\cos^2\alpha}.$$

On reconnaît dès lors que le centre de courbure de l'el-

lipse s'obtient en élevant en s une perpendiculaire à la normale, rencontrant le rayon vecteur mF en t, puis déterminant le point d'intersection G de la normale avec la perpendiculaire en t à ce rayon.

Ces dernières considérations sont applicables à l'hyperbole et à la parabole.

3° *Rayon de courbure de l'hélice.*—Considérons une hélice tracée sur un cylindre quelconque, c'est-à-dire une courbe qui coupe toutes les génératrices de ce cylindre sous un angle constant β, et soit ρ' le rayon de courbure de la section droite du cylindre. L'hélice peut être considérée comme décrite par un point mobile qui se meut sur la section droite avec la vitesse constante v, tandis que cette section se transporte parallèlement à elle-même et perpendiculairement aux génératrices avec la vitesse $v \cot\beta$.

Or la seule accélération qui résulte de ce double mouvement est l'accélération normale $\frac{v^2}{\rho'}$ à la section droite, nécessairement dirigée suivant le rayon de courbure de l'hélice, puisque la vitesse $v\sqrt{1+\cot^2\beta}$ dans le mouvement résultant est constante. Ainsi la direction du rayon de courbure ρ de l'hélice se confond avec celle du rayon de courbure de la section droite. Enfin on a, pour déterminer ρ, la relation

$$\frac{v^2}{\rho'} = \frac{v^2(1+\cot^2\beta)}{\rho},$$

d'où la relation connue

$$\rho = \rho'(1+\cot^2\beta),$$

à l'aide de laquelle ρ s'obtient par une construction géométrique très-simple.

58. *Des propriétés géométriques et du tautochronisme de la cycloïde.*

1° *De la courbure.* — Reportons-nous au n° 28 (*fig.* 9). L'accélération du point m, étant due uniquement au mouvement circulaire uniforme autour du centre O, est dirigée

suivant le rayon mO, et est exprimée par $\omega^2 r$; sa projection sur la normale bm étant $\omega^2 \frac{c}{2}$, on a

$$\omega^2 \frac{c}{2} = \frac{\overline{mp}^2}{\rho} = \frac{\omega^2 c^2}{\rho},$$

d'où

$$\rho = 2c.$$

Donc le rayon de courbure de la cycloïde est double de la normale.

Soit c le centre de courbure de la cycloïde correspondant au point m; élevons en c la perpendiculaire cg à bc, qui rencontre le prolongement de ab en g. Les deux triangles rectangles bcg, amb étant égaux, on a

$$bg = ab = 2\,\mathrm{R}.$$

Sur bg comme diamètre, décrivons une circonférence qui passe nécessairement par le point c; menons la parallèle gd à bx, qui rencontre en d le prolongement de la perpendiculaire fs à bx abaissée du sommet f de la courbe. On a

$$\text{arc } cg = \text{arc } am = \text{arc } amb - \text{arc } mb = bs = dg;$$

d'où il suit que le lieu des points c résulte du roulement de la circonférence bg sur la droite dg, ou que *la développée de la cycloïde est une courbe qui lui est identique, mais dont les sommets et les points de rebroussement correspondent respectivement aux points de rebroussement et aux sommets de la proposée.*

On sait d'ailleurs que l'extrémité libre d'un fil de longueur fd fixé en d décrirait la cycloïde proposée par suite de l'enroulement de ce fil sur la développée.

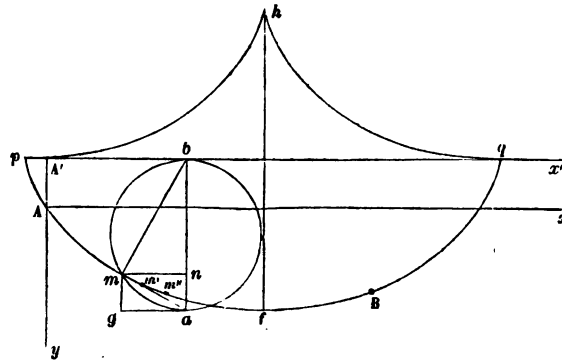
2° *Aire de la cycloïde.* — Soient m' un point de la cycloïde infiniment voisin du point m, et $m'c$ la normale correspondante, rencontrant bx en b'. Les deux triangles mcm', bcb', étant entre eux comme les produits des côtés comprenant l'angle commun ou :: 4 : 1, le quadrilatère

mbb'm' est le triple du triangle *bcb'* ou de l'élément *mbn* du cercle, obtenu en menant *bn* parallèle à *cm'*. On déduit de là que : 1° *une portion de l'aire de la cycloïde, comprise entre deux normales quelconques, est le triple de la portion de l'aire du cercle générateur, limitée par les parallèles à ces normales menées par le point de contact de ce cercle avec la droite directrice;* 2° *l'aire de la cycloïde est triple de celle du cercle générateur.*

3° *Rectification de la cycloïde.* — Traçons les cordes *am*, *an*, issues du sommet *a* du cercle, dont la dernière rencontre *bm* en *k*. L'élément *kn* du cercle ayant le point *b* pour centre et *bn* pour rayon, étant semblable à l'élément *mm'* du cercle de centre *c*, on a $mm' = 2\,kn$; en d'autres termes, l'accroissement infiniment petit de l'arc $fm = s$ de la cycloïde, compté à partir du sommet *f*, est égal au double de l'accroissement infiniment petit de la corde *am*. Donc : 1° *l'arc de la cycloïde compté à partir du sommet est égal au double de la corde correspondante du cercle générateur, partant de son sommet;* 2° *la longueur totale de la cycloïde est égale à quatre fois le diamètre du cercle générateur.*

4° *Du tautochronisme de la cycloïde.* — Considérons un

Fig. 19.



point pesant *m* assujetti à se mouvoir sur une cycloïde fixe

à base horizontale. En représentant par le diamètre $ba = 2R$ du cercle générateur l'accélération g de la pesanteur, l'accélération normale, qui est détruite, sera représentée par mb, et l'accélération tangentielle par ma. Cette dernière aura ainsi pour expression

$$ma \cdot \frac{g}{2R} = \frac{g}{4R} s,$$

et sera proportionnelle à l'arc compris entre la position du point mobile et le point le plus bas de la courbe. Il résulte de là et des n°s 37 et 47, où l'on supposera $k = \frac{g}{4R}$: 1° *que le mobile m oscillera de part et d'autre du point f, en décrivant des arcs égaux à droite et à gauche de ce point;* 2° *que la durée* $T = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}$ *de chaque oscillation complète est indépendante de la position initiale du mobile sur la courbe, correspondant à une vitesse nulle, ou encore, de l'amplitude de l'oscillation*. Ce qui constitue la propriété du *tautochronisme* de la cycloïde.

Concevons que l'on enroule la cycloïde sur un cylindre vertical, de manière que l'on amène la base de cette courbe à coïncider avec le périmètre de l'une des sections droites du cylindre. La décomposition de l'accélération g s'effectuera dans le plan tangent au cylindre de la même manière que ci-dessus; mais il est clair que la composante tangentielle aura la même valeur que lorsque la courbe était plane, et qu'elle sera ainsi proportionnelle à l'arc mf. Donc l'enveloppe de la cycloïde est encore tautochrone, et il existe par suite une infinité de *tautochrones à double courbure*.

Soient h le centre de courbure de la cycloïde en son sommet f; hp, hq, les deux branches cycloïdales qui constituent sa développée. Concevons que l'on fixe en h un fil de longueur $hf = 4R$, terminé par une masse pesante, et que

ce fil, écarté de sa verticale, soit assujetti, en oscillant, à s'enrouler alternativement le long de hp et de hq. Le corps pesant décrivant la cycloïde pfq, on obtient un pendule dont les oscillations ont la même durée, quelle que soit leur amplitude. L'idée d'un pareil pendule est due à Huygens, qui désirait doter les horloges d'un régulateur irréprochable. Mais la difficulté de construction des demi-cycloïdes directrices, les déformations auxquelles elles sont exposées en raison des variations de température, rendent cet appareil inapplicable, et on le considère uniquement comme une curieuse conception théorique.

§ VI. — Théorèmes généraux relatifs au Mouvement d'un Point.

59. *Équations du mouvement d'un point.* — Soient x, y, z les coordonnées d'un point mobile par rapport à trois axes rectangulaires, φ; v_x, v_y, v_z les composantes correspondantes de la vitesse; φ_x, φ_y, φ_z les composantes suivant les axes de son accélération. On a

$$\varphi_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad v_x = \frac{dx}{dt},$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_x,$$

et de même

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varphi_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \varphi_z \text{ (*)}.$$

Ces trois équations feront connaître x, y, z en fonction de t, et la nature de la trajectoire lorsque l'accélération sera connue.

(*) En multipliant ces équations par la masse, on introduit les forces en lieu et place des accélérations; et c'est ici que l'on peut définir ce que l'on entend par *force d'inertie*. (*Voyez* mes *Éléments de Mécanique*.)

Comme application, reprenons la question (38) du mouvement parabolique des projectiles pesants dans le vide, en choisissant pour axe des x l'horizontale du point de départ, comprise dans le plan vertical passant par la direction de la vitesse initiale v_0, et pour axe des z la verticale en ce point. Les équations ci-dessus donnent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g.$$

Soit α l'inclinaison de v_0 sur l'horizontale. On a pour $t = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = 0,$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

de sorte qu'il vient, en intégrant,

$$x = v_0 \cos\alpha . t, \quad y = 0, \quad z = v_0 \sin\alpha . t - \frac{gt^2}{2},$$

et pour l'équation de la trajectoire résultant de l'inclinaison de t

$$z = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{g}{2v_0^2} x^2 (1 + \operatorname{tang}^2\alpha),$$

équation d'une parabole dont l'identité avec celle du n° 38 est facile à reconnaître. En y supposant $z = 0$, on obtient pour la portion OB de l'horizontale du point de départ, limitée par la parabole,

$$\mathrm{OB} = x = \frac{2v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha . = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{g}.$$

Cette longueur est ce que l'on nomme la *portée du projectile;* pour une même vitesse initiale, la portée atteind son maximum lorsque $\alpha = 45°$; et la portée est la même pour deux directions dont l'angle aurait pour bissectrice une droite inclinée de 45° sur l'horizon.

60. *Digression sur les produits géométriques.* — Nous appelons *produit géométrique* de deux longueurs a, b, issues d'un même point, le produit algébrique de l'une d'entre elles par la projection de l'autre sur sa direction, ou encore le produit algébrique de ces longueurs par le cosinus de leur angle (*).

Le produit géométrique de deux longueurs sera donc positif on négatif selon que leur angle sera aigu ou obtus.

On voit aussi que le produit géométrique de deux droites est nul lorsqu'elles sont rectangulaires et qu'il est égal à leur produit algébrique lorsqu'elles ont la même direction.

Si pour représenter le produit géométrique de a, b, on emploie la notation symbolique $\bar{a}.\bar{b}$, il est clair que de la définition ci-dessus on déduit, $\bar{a}.\bar{b} = \bar{b}.\bar{a}$; en d'autres termes, dans un produit géométrique de deux facteurs, on peut intervertir l'ordre de ces facteurs.

Supposons que a soit une somme géométrique représentée par

$$\bar{a} = \bar{c} + \bar{c'} + \bar{c''} + \ldots,$$

on a

$$a \cos(a, b) = c \cos(c, b) + c' \cos(c', b) + \ldots,$$

et en multipliant par b,

$$ab \cos(a, b) = cb \cos(c, b) + c' b \cos(c', b) + \ldots,$$

ou

$$\bar{a}\,\bar{b} = \bar{c}\,\bar{b} + \bar{c'}\,\bar{b'} + \ldots,$$

ce que l'on peut exprimer ainsi :

Le produit géométrique d'une longueur par une somme

(*) On entend ordinairement par *produit géométrique* de deux longueurs le produit de ces longueurs par le sinus de leur angle. Mais comme nous n'avons pas à considérer de pareilles expressions, nous avons cru devoir changer le sens ordinaire du produit géométrique, afin de ne pas employer une nouvelle dénomination.

géométrique est égal à la somme algébrique des produits géométriques de cette ligne par les éléments de la somme géométrique.

61. *Théorèmes sur les propriétés des produits géométriques des accélérations par les éléments de chemin décrits.* — La considération du produit géométrique de l'accélération φ d'un point mobile par l'élément de chemin décrit est très-importante en Cinématique. Il est même très-utile, comme mode de démonstration, d'estimer de pareils produits, non-seulement pour le chemin réellement décrit, mais encore pour tout déplacement hypothétique du point mobile que l'on peut concevoir géométriquement. Dans ce dernier cas l'élément de chemin est appelé *déplacement virtuel.*

On déduit de ce qui précède que :

1° *Le produit géométrique de la résultante de plusieurs accélérations simultanées, par tout déplacement élémentaire, réel ou virtuel, est égal à la somme algébrique des produits géométriques des accélérations composantes par le même déplacement.*

2° *Si plusieurs accélérations ont une résultante nulle, la somme de leurs produits géométriques par tout déplacement élémentaire est nulle.*

3° *Si un point est animé de plusieurs mouvements simultanés, le produit géométrique de l'accélération par le déplacement élémentaire résultant est égal à la somme algébrique des produits semblables relatifs aux déplacements composants et à cette accélération.*

62. *Relation entre la vitesse d'un point mobile et le produit géométrique relatif à l'accélération et au chemin parcouru.* — Soient (*fig.* 10, p. 24), $\overline{Av_1}$, $\overline{Av}$ les droites qui représentent les vitesses v_1, v d'un point mobile au commencement et à la fin de l'élément du temps dt ; u la

projection du point v sur Av_1; on a

$$v_1\,dt = ds,$$

et le produit géométrique de l'accélération φ par le chemin élémentaire a pour expression

$$-\frac{\overline{v_1 u}}{dt}\cdot ds = -\overline{v_1 u} \times v_1 .$$

Or le triangle vAv_1 donne

$$v^2 = v_1^2 + \varphi^2 dt^2 - 2\,v_1 . \overline{v_1 u}\,;$$

d'où, en négligeant $\varphi^2\,dt^2$, qui est du second ordre,

$$\frac{v^2 - v_1^2}{2} = \varphi \cos(\varphi, ds) . ds .$$

Ainsi *le demi-accroissement du carré de la vitesse, relatif à l'élément du temps, est égal au produit géométrique correspondant de l'accélération par le chemin élémentaire.*

D'où l'on déduit sans difficulté que *le demi-accroissement du carré de la vitesse, pour un intervalle quelconque de temps, est égal à la somme correspondante des produits géométriques de l'accélération par l'élément de chemin.*

Si l'on représente par v_0, v, les vitesses correspondant au commencement et à la fin de cet intervalle, on a

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_0^s \varphi \cos(\varphi, ds)\,ds .$$

On peut arriver également à cette formule en remarquant que le produit géométrique de φ par $ds = v\,dt$ est égal au produit semblable $\frac{dv}{dt}\cdot v\,dt = v\,dv$, relatif à l'accélération tangentielle, ce qui donne

$$v\,dv = \varphi \cos(\varphi, ds)\,ds,$$

et l'on n'a plus qu'à faire une intégration. La somme $\int_0^s \varphi\cos(\varphi, ds)\, ds$ s'obtiendra, si l'on veut, en calculant l'aire d'une courbe plane, dont s serait l'abscisse et $\varphi\cos(\varphi, ds)$ l'ordonnée, et cette évaluation pourra toujours se faire, au moins approximativement, en employant une des méthodes connues de quadrature par approximation, notamment celle de M. Poncelet (*).

L'équation ci-dessus est également applicable au cas où le point, n'étant pas libre, est assujetti à se mouvoir sur une ligne ou une surface fixe; attendu que cette ligne ou cette surface ne détruit (48) que la composante normale de l'accélération qui ne donne aucun terme dans le second membre de cette équation.

Les deux théorèmes suivants, dont les démonstrations sont évidentes, permettront, dans un grand nombre de cas, de simplifier l'application de la formule précédente.

1° *L'intégrale du produit géométrique de l'élément de chemin par l'accélération, lorsqu'elle est constante et qu'elle reste constamment tangente à la trajectoire, est égale au produit de l'accélération par le chemin total parcouru.*

2° *L'intégrale du produit géométrique de l'élément de chemin par une accélération constante qui reste parallèle à une droite fixe, est égale au produit de cette accélération par la projection sur cette droite de la corde qui joint les projections extrêmes du mobile.*

Ce dernier théorème est notamment applicable au mouvement d'un point pesant libre ou assujetti à se mouvoir sur une courbe ou une surface fixe (**).

(*) *Voyez* mes *Éléments de Mécanique.*

(**) Le produit géométrique d'une force par l'élément de chemin est ce

63. *Du mouvement d'un point pesant sur une courbe.* — Considérons en particulier le mouvement d'un point mobile pesant placé sur une courbe de forme quelconque sans vitesse initiale; et soit z la hauteur verticale dont il est descendu lorsque la vitesse est V. On a

$$V^2 = 2gz.$$

La vitesse V ne s'annulant qu'avec z, il s'ensuit que le mobile s'élèvera sur l'autre branche de la courbe à la hauteur du point de départ, puis, prenant un mouvement inverse, il finira par atteindre sa position initiale, pour recommencer ensuite une oscillation semblable à la précédente, et ainsi de suite.

64. *De la courbe de la plus vite descente ou brachistochrone.* — Le temps $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$, employé par le point qui termine un pendule simple de longueur l, pour exécuter une demi-oscillation, étant inférieur au temps $2\sqrt{\frac{l}{g}}$ (56) que mettrait ce point à parcourir librement sous l'action de la pesanteur la corde de l'arc décrit, on est naturellement conduit à se demander quelle est parmi toutes les courbes passant par deux points A, B (*fig.* 19, p. 60) celle pour laquelle un point pesant, partant du repos ou avec une vi-

---

que l'on appelle le *travail élémentaire* de cette force; l'intégrale de ce produit est le *travail total* de la force. Le *travail* est *moteur* ou *résistant*, selon qu'il est positif ou négatif.

Les théorèmes du n° 61, ainsi que les derniers du n° 62, subsistent évidemment pour le travail des forces.

Le second théorème conduit au principe du travail virtuel, dont l'extension à un système quelconque de points matériels donne les conditions générales de l'équilibre des forces.

En multipliant par la masse les deux termes de l'équation du n° 62, elle donne le *principe des forces vives*, que l'on étend sans peine à un système matériel quelconque. (*Voyez* mes *Éléments de Mécanique.*)

tesse initiale v_0 en A, arrive en B dans le temps le plus court. Tel est le problème de la brachistochrone, proposé en 1696 par Jean Bernoulli.

La recherche de la courbe de la plus vite descente dépend du calcul des variations; mais on peut y arriver par de simples considérations géométriques, en établissant préalablement les deux principes suivants.

Premier Principe. — Un arc quelconque ab de la brachistochrone est l'arc de la plus vite descente joignant les points a, b, pour la vitesse acquise en a; car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait substituer à l'arc ab celui de la plus vite descente, mais alors la courbe considérée ne serait plus la brachistochrone.

On pourra supposer en particulier que l'arc ab se réduit à deux éléments consécutifs de la courbe.

Deuxième Principe. — Soient m, m'' deux points situés de part et d'autre d'un plan P'; m' un point de ce plan; i, i' les angles formés par les droites mm', $m'm''$ avec la normale au plan; concevons qu'un mobile partant du point m parcoure mm' avec la vitesse constante v, et que, arrivé en m', il décrive l'élément $m'm''$ avec une vitesse v' également constante.

On sait (*) que pour que le mobile mette le moins de temps possible pour aller de m en m'', en laissant indéterminée la position de m', il faut que

1° mm', $m'm''$ soient situés dans le plan perpendiculaire à P passant par A et B;

2° La relation $\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin i'}{v'}$ soit satisfaite.

(*) Soit m'_1 la projection de m' sur le plan perpendiculaire à P passant par m et m''; il est clair que $mm'_1 < mm'$, $m'_1 m'' < m'm''$; par suite, le temps employé pour parcourir $mm'_1 m''$ sera moindre que celui qui est rela-

Cela posé, revenons au problème de la brachistochrone. Concevons que l'on divise la courbe en éléments par des plans horizontaux consécutifs équidistants, dont nous représenterons l'intervalle par dy. Soient (*fig.* 19, p. 60) m, m', m'' trois points consécutifs de la courbe obtenus de cette manière et dont les distances au plan horizontal Q passant par A sont $y, y + dy, y + 2dy$; P′ le plan horizontal passant par m'; $v = \sqrt{v_0^2 + 2gy} = \sqrt{2g(y+h)}$ la vitesse acquise en m, h étant la hauteur $\frac{v_0^2}{2g}$ due à la vitesse v_0; i l'angle aigu formé par mm' avec la verticale.

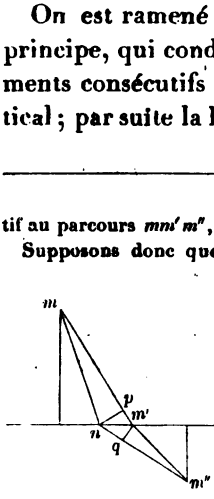
D'après le premier principe ci-dessus, le mobile emploie moins de temps pour aller de m en m'', en passant par le point m' de P′ (les chemins mm', $m'm''$ étant respectivement décrits avec les vitesses acquises en m et à la rencontre de P′), qu'en passant par tout autre point du plan.

On est ramené dès lors à faire l'application du second principe, qui conduit à ces conséquences : 1° les deux éléments consécutifs mm', $m'm''$ sont situés dans un plan vertical; par suite la brachistochrone est comprise dans le plan

---

tif au parcours $mm'm''$, ce qui démontre la première partie de l'énoncé.

Supposons donc que m, m', m'' soient dans un même plan, et soient n une position infiniment voisine de m', np, $m'q$ les perpendiculaires abaissées de n et m' sur mm', nm''. On a



$$mn = mp, \quad m''q = m'm'';$$

la différence des temps employés par le mobile pour parcourir les chemins $mm'm''$, mnm'', ou

$$\frac{m'p}{v} - \frac{nq}{v'} = m'n\left(\frac{\sin i}{v} - \frac{\sin i'}{v'}\right)$$

devant être nulle, puisque le premier de ces chemins correspond à un temps minimum, il s'ensuit que

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin i'}{v'}.$$

vertical passant par les points A et B; 2° le rapport $\frac{\sin i}{v}$ est le même pour deux éléments consécutifs, c'est-à-dire qu'il est indépendant de y. Représentons par $\frac{1}{a}$ la valeur constante de ce rapport, a étant une grandeur linéaire, il vient

$$\sin i = \sqrt{\frac{2g}{a^2}(y+h)},$$

ou, en posant $\frac{a^2}{2g} = 2\mathrm{R}$,

$$\sin i = \sqrt{\frac{y+h}{2\mathrm{R}}}.$$

Portons verticalement, à partir du point A (*fig.* 19, p. 60), la longueur $\mathrm{AA}' = h$ au-dessus de l'horizontale $\mathrm{A}x$ passant par ce point et comprise dans le plan de la courbe, et soient b le point de rencontre de la normale en m avec l'horizontale passant par A'; a l'intersection de la tangente en m avec la verticale du point b; n la projection de m sur ba. L'angle mbn est le complément de i, et nb est égal à $y+h$. Or le triangle mbn donne

$$\sin i = \frac{nb}{mb} = \frac{nb}{\sqrt{nb \times ab}} = \sqrt{\frac{y+h}{ab}}.$$

De la comparaison de cette formule avec la précédente il résulte que ab est une longueur constante égale à $2\mathrm{R}$, et que, par conséquent, l'élément de la brachistochrone en m se confond avec celui de la cycloïde décrite par le point m de la circonférence construite sur ab comme diamètre qui roule sur la droite $\mathrm{A}'x'$; d'où l'on déduit sans peine que ces deux courbes coïncident dans toute leur étendue.

La courbe de la plus vite descente est donc la cycloïde passant par les deux points A et B, et dont la base est située sur l'horizontale du point A'.

Dans le cas où $v_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque le mobile part

de A sans vitesse initiale, Ax devient la direction de la base de la cycloïde, et il est alors facile de construire cette courbe. Soient Aλ la base d'une cycloïde engendrée par un point, primitivement en A, d'une circonférence, d'un rayon arbitraire, roulant sur Ax ; β le point d'intersection de cette cycloïde avec AB ; γ le point de rencontre de Ax avec la parallèle à $\beta\lambda$ menée par le point B ; Aγ sera la base de la cycloïde cherchée et $\frac{A\gamma}{2\pi}$ le rayon du cercle générateur. On sait en effet que toutes les cycloïdes sont semblables, puisque chacune d'elles ne dépend que d'un paramètre constant, le rayon du cercle générateur.

65. *Quelle est parmi toutes les courbes passant par un point* A (*fig.* 18, p. 54) *et comprises dans un même plan vertical, celle pour laquelle un point pesant, partant du repos en* A, *parcourt un arc d'une longueur quelconque dans le même temps qu'il mettrait à décrire la corde correspondante.*

Soient Ay la verticale passant par le point de départ A ; B le point de la courbe où se trouve le mobile au bout du temps t ; B′ la position suivante au bout du temps $t + dt$; θ l'angle BAy ; r la longueur de la corde AB ; $d\theta$ l'accroissement élémentaire BAB′ de θ ; D le point de rencontre de la verticale Ay avec la perpendiculaire en B à AB ; b le point de rencontre de la circonférence décrite sur AD comme diamètre avec AB′ ; BT le prolongement de B′B, formant la tangente à la courbe.

Le mobile arrivera en B au bout du même temps et avec la même vitesse en parcourant ou l'arc AB ou la corde AB ; et le temps employé pour aller de B en B′ sera égal au rapport de l'élément BB′ à cette vitesse. D'un autre côté, le mobile mettrait à parcourir la longueur Ab le même temps que pour décrire la corde AB (56) ; par suite le temps employé pour aller de b en B′ avec la vitesse acquise en b est

égal à celui que mettra le mobile à décrire BB′ avec la vitesse acquise en B.

Mais les vitesses acquises en b et B ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite, du même ordre de grandeur que la différence entre les distances de ces deux points au plan horizontal passant par le point A; on peut donc les considérer comme égales, et alors

$$BB' = bB',$$

ou

$$\text{angle } BbB' = \text{angle } bBB'.$$

Or l'angle $bBA = 90^\circ - \theta$ pouvant être considéré comme égal à l'angle BbB', il suit de l'égalité précédente que

$$\text{angle } ABB' = 2(90^\circ - \theta) = 180 - 2\theta,$$

ou encore que l'angle ABT formé par la tangente à la courbe avec le rayon vecteur AB est égal à 2θ. Pour obtenir l'équation de la courbe il suffit d'intégrer l'équation

$$\frac{rd\theta}{dr} = \text{tang}\, 2\theta$$

ou

$$2\frac{dr}{r} = \frac{d\sin 2\theta}{\sin 2\theta},$$

d'où, en appelant c^2 une constante,

$$r^2 = c^2 \sin 2\theta.$$

La courbe cherchée est donc une lemniscate ayant pour centre le point de départ A et dont l'axe fait avec la verticale un angle de 45°.

Si le temps employé à parcourir l'arc AB, au lieu d'être égal au temps que mettrait le mobile à décrire la corde correspondante, devait se trouver dans un rapport constant avec ce dernier, on trouverait de la même manière que ci-dessus

$$BB' = k.B'b,$$

ou, en appelant i l'angle ABT formé par la tangente avec le rayon vecteur,

$$\cos\theta = k\cos(i-\theta),$$

ce qui constitue un théorème facile à énoncer. En développant $\cos(i-\theta)$, et remplaçant i par sa valeur tirée de $\operatorname{tang} i = r\frac{d\theta}{dr}$, on arrive à une équation dont on peut obtenir l'intégrale.

66. *Expression du produit géométrique de l'accélération par un déplacement élémentaire résultant d'une rotation autour d'un point.*

Soient mD (*fig.* 3, p. 12) la droite qui représente l'accélération φ d'un point m; mm' un déplacement virtuel de ce point, résultant d'une rotation autour d'un point O; ma, mk, les projections de mm', mO sur mD; $d\omega$ le déplacement angulaire élémentaire $m\mathrm{O}m'$; on a

$$mm' = m\mathrm{O}.d\omega,$$

et par la similitude des triangles $mm'a$, $m\mathrm{O}k$,

$$ma = mm' \times \frac{\mathrm{O}k}{m\mathrm{O}} = \mathrm{O}k.d\omega;$$

on déduit de là pour le produit géométrique de φ par mm'

$$\overline{\varphi}.\overline{mm'} = \varphi \times ma = \varphi.\mathrm{O}k.d\omega.$$

Ce produit géométrique est donc le même que si le point m coïncidait avec le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur la direction de l'accélération, pour un même déplacement angulaire autour de ce point.

Nous donnerons au produit $\varphi \times \mathrm{O}k$ le nom de *moment* (*)

(*) Par analogie avec ce que l'on appelle, en mécanique, le *moment d'une force*.

de l'accélération, par rapport au point O pris *pour centre des moments*.

On devra considérer ce moment comme positif ou négatif, conformément aux conventions établies sur les signes des produits géométriques, ou selon que le point k se déplacera dans le sens de φ ou en sens inverse.

Nous supposerons, comme on le fait ordinairement, que le sens du déplacement angulaire $d\omega$ est invariable, et qu'il a lieu de la gauche vers la droite.

67. Il résulte de ces considérations et de celles du n° 61 que :

1° *Le moment de la résultante de plusieurs accélérations situées dans un même plan, par rapport à un point de ce plan, est égal à la somme algébrique des moments des composantes*, puisque les produits géométriques ne diffèrent des moments que par le facteur constant $d\omega$.

2° *La somme algébrique des moments des composantes par rapport à un point de la résultaute est nulle* (*).

Ces deux théorèmes, qui subsistent évidemment en projection sur un plan, pour des accélérations dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, ont lieu avec la même évidence, ainsi que les suivants, pour les vitesses, et pour de simples lignes droites assujetties aux règles que suivent les vitesses et les accélérations.

68. *Composition et décomposition des moments.* — Concevons qu'à partir du point O on porte sur la perpendiculaire au plan qu'il détermine avec φ, une longueur L proportionnelle au moment, dans le sens pour lequel ce moment serait positif pour l'observateur couché suivant cette droite en ayant les pieds en O.

Soit L′ la droite qui représente de la même manière le

(*) Ces théorèmes sont dus à Varignon.

moment de la projection φ' de φ sur un plan passant par le point O.

Les longueurs L, L′ étant proportionnelles aux aires des triangles formés par le point O et les droites qui représentent φ, φ', *il s'ensuit que la seconde est la projection de l'autre sur sa direction.*

On déduit de là et de ce qui précède que,

En projection sur un axe, la droite qui représente le moment de la résultante de plusieurs accélérations dirigées d'une manière quelconque dans l'espace, est la somme algébrique des droites semblables relatives aux composantes.

On déduit de là ce corollaire:

La droite qui représente le moment de la résultante est la somme géométrique des droites semblables relatives aux composantes;

En d'autres termes, elle s'obtient en composant ces dernières comme des vitesses ou des accélérations. On voit ainsi que la droite qui représente le moment de l'accélération élémentaire est la *différentielle géométrique* de celle qui représente le moment de la vitesse.

69. *Théorèmes relatifs aux moments des vitesses, aux aires, etc.* — Il résulte de ce qui précède que les extrémités des droites qui représentent les moments des vitesses successives d'un point mobile, déterminent une courbe, dont l'élément rectiligne mesure le moment de l'accélération élémentaire.

Si donc on appelle V′, V les vitesses au commencement et à la fin d'un intervalle de temps t; Φ l'accélération; P, P′, q, les distances de V, V′, Φ au centre des moments, on a la relation géométrique

$$\overline{VP} - \overline{V'P'} = \int_0^t \overline{q\Phi\, dt}.$$

En désignant par v, v', φ les projections de V, V', Φ sur un plan, p, p', q leurs distances au centre des moments,

$$vp - v'p' = \int_0^t \varphi q dt;$$

ce qui exprime que, *en projection sur un plan, l'accroissement du moment de la vitesse, pris par rapport à un point du plan, pour un certain intervalle de temps, est égal à la somme des moments des accélérations élémentaires pour le même intervalle* (*).

On peut énoncer ce théorème sous une autre forme. Remarquons en effet que $\frac{1}{2}vp = \frac{1}{2} \cdot \frac{pds}{dt}$ est la dérivée, par rapport au temps de l'aire décrite autour du centre des moments par le rayon vecteur qui joint ce centre au point mobile : c'est ce que l'on peut appeler, avec M. Binet, la vitesse *aréolaire*. Donc *le double de l'accroissement de la vitesse aréolaire pour un intervalle de temps quelconque est égal à l'intégrale du moment de l'accélération élémentaire.*

Si l'on appelle ω la vitesse angulaire du rayon vecteur r, autour du centre des moments, l'aire décrite, dans le temps dt, par le rayon étant $\frac{1}{2}\omega r^2 dt$, la vitesse *aréolaire* est exprimée par $\frac{1}{2}\omega r^2$, c'est-à-dire *par la moitié du produit du carré du rayon vecteur par sa vitesse angulaire autour du centre des moments.*

Des théorèmes que l'on vient d'énoncer on déduit les suivants :

(*) En multipliant par la masse, on obtient le *principe relatif aux moments des quantités de mouvement et des impulsions des forces*, que l'on étend facilement aux systèmes matériels soumis à leurs actions mutuelles et à des forces extérieures. (*Voyez*, pour plus de développements et pour les conséquences que l'on en déduit, les additions à mes *Éléments de Mécanique*.)

Lorsque la direction de l'accélération d'un point mobile dans un plan passe constamment par un point fixe de ce plan : 1° la vitesse du mobile varie en raison inverse de la perpendiculaire abaissée de ce point sur sa direction ; 2° les aires décrites autour du point fixe par le rayon vecteur sont proportionnelles aux temps correspondants ; 3° la vitesse angulaire du rayon vecteur varie en raison inverse du carré de ce rayon.

Réciproquement, si l'une de ces trois conditions est remplie, l'accélération est nulle ou passe constamment par le point fixe. Nous avons déjà eu occasion de signaler la proportionnalité entre les aires et les temps écoulés dans les problèmes des n°s 35 et 40.

70. *Équations du mouvement d'un point dont la direction de l'accélération passe constamment par un point fixe.* — La trajectoire est comprise dans un plan passant par le point fixe ; car la vitesse et l'accélération élémentaire étant situées dans un plan passant par ce point, il en est de même de leur résultante ou de la vitesse à l'instant suivant, et ainsi de suite.

Soient r le rayon vecteur mené du mobile au point fixe ; θ l'angle qu'il forme avec une droite menée par ce point dans le plan de la courbe ; φ l'accélération du mobile dirigée suivant r ; v_0, p_0, r_0 les valeurs de v, p, r pour une position déterminée du mobile : on a (69), d'après le principe des aires,

$$\frac{r^2 d\theta}{dt} = v_0 p_0,$$

d'où

$$dt = \frac{r^2 d\theta}{v_0 p_0}.$$

Le produit géométrique de φ par l'élément de chemin est $+\varphi dr$, ou $-\varphi dr$, selon que φ est dirigée du point fixe vers le mobile ou en sens inverse, et l'on a, d'après un prin-

cipe connu (62),

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{r_0}^{r} (\pm \varphi)\, dr.$$

Or

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{r^2 d\theta^2 + dr^2}{dt^2},$$

ou, en remplaçant dt par sa valeur ci-dessus,

$$v^2 = v_0^2 p_0^2 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4} \cdot \frac{dr^2}{d\theta^2}\right).$$

Par suite

$$\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{p_0^2} + \frac{2}{v_0^2 p_0^2} \int_{r_0}^{r} (\pm \varphi\, dr),$$

équation qui permettra de résoudre analytiquement les problèmes des n°s 35 et 40 et les problèmes inverses. Nous ne nous arrêterons pas à ces exercices d'analyse, qui ne présentent d'ailleurs aucune difficulté.

CHAPITRE TROISIÈME.

MOUVEMENTS GÉOMÉTRIQUES DES SYSTÈMES INVARIABLES.

§ Ier. — Mouvements de Translation et de Rotation.

71. Une figure, un solide, dont les points ou éléments conservent les mêmes distances mutuelles, malgré le mouvement imprimé à leur ensemble, est ce qu'on nomme en général un *système invariable*.

72. Lorsque les divers points d'un système invariable décrivent, à un instant donné, des éléments rectilignes égaux et parallèles, le mouvement de leur ensemble se nomme mouvement *translatoire* ou *de translation*. Il est évident que les vitesses *simultanées* des divers points sont aussi égales et parallèles au même instant.

Le mouvement de translation peut être *rectiligne* ou *curviligne*, selon que les différents points du corps décrivent des lignes droites ou des lignes courbes; seulement dans le deuxième cas les directions parallèles du mouvement changent d'un instant à l'instant suivant.

73. Lorsque les différents points d'un système invariable décrivent simultanément, autour d'un axe fixe, des éléments de cercle concentriques, perpendiculaires à cet axe, le mouvement du système est ce que l'on nomme *un mou-*

vement *rotatoire* ou *de rotation* autour de cet axe, et l'on prouve aisément, par la géométrie, que les déplacements angulaires simultanés des perpendiculaires à l'axe, ou des plans méridiens correspondant aux divers points du système, sont égaux. Il suffit, pour cela, de considérer le déplacement fini ou infiniment petit, de l'un quelconque des angles plans ou dièdres formés par deux de ces perpendiculaires ou de ces plans, et de retrancher, de chacun de ces angles, la partie qui leur est commune dans les deux positions.

Soient V et ω les vitesses contemporaines de deux points situés aux distances r et 1 de l'axe, les éléments $V\,dt$, $\omega\,dt$ étant semblables, il vient

$$\frac{V\,dt}{\omega\,dt} = \frac{r}{1},$$

ou

$$V = \omega r.$$

On désigne ω sous le nom de *vitesse angulaire*, comme nous avons déjà eu occasion de le dire (8), et la vitesse en un point est égale au produit de la vitesse angulaire par la distance de ce point à l'axe.

74. Le *mouvement de glissement* est celui dans lequel les mêmes points ou éléments de la surface externe d'un solide se mettent successivement en contact avec les éléments distincts et consécutifs de la surface d'un autre solide.

75. Dans le *mouvement de roulement*, les éléments superficiels différents et consécutifs d'un corps viennent se mettre successivement en contact, sans glissement, avec les éléments consécutifs de la surface d'un autre corps.

Considérons en particulier deux cylindres roulant l'un sur l'autre; on peut réduire la question au roulement de leurs sections droites l'une sur l'autre. Or, en regardant ces courbes comme des polygones infinitésimaux ayant ac-

tuellement un côté commun ab, les côtés consécutifs bc', $c'd'$,... de la courbe mobile doivent venir successivement coïncider avec les éléments respectivement égaux bc, cd,... de la courbe fixe; et pour que $b'c'$ vienne coïncider avec bc, il faut qu'il y ait rotation de la figure mobile autour du point b supposé fixe.

D'où l'on conclut qu'une courbe qui roule sur une autre peut à chaque instant être considérée comme tournant, pendant un temps infiniment petit, autour du point de contact, supposé fixe pendant cet instant, et qui prend le nom de *centre instantané de rotation;* par suite *la normale à la courbe décrite par un point quelconque de la figure mobile passe par ce point.*

On voit ainsi, d'une autre manière, pourquoi la normale à la cycloïde passe par le point de contact de la circonférence avec la droite directrice (28); pourquoi la normale aux épycicloïdes passe par le point de contact des circonférences, etc.

Nous nous bornerons actuellement à ces notions élémentaires sur les mouvements de glissement et de roulement, dont nous ferons plus loin une étude approfondie.

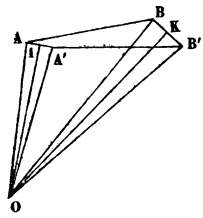
§ II. — Du Mouvement d'un système invariable parallèlement a un plan fixe.

76. Le mouvement de rotation autour d'un axe fixe n'est évidemment qu'un cas particulier de celui où tous les points du système sont animés à un instant donné de vitesses simultanées quelconques parallèles à un plan donné, mouvement qui, envisagé dans la projection du système sur le plan, revient à celui d'une figure invariable mobile dans ce même plan, et n'est lui-même qu'un cas particulier du mouvement le plus général d'un corps.

77. *Du centre instantané de rotation d'une figure invariable mobile dans son plan.* — La position et le mouve-

ment d'une telle figure sont évidemment définis par ceux d'une droite AB (*fig.* 20) qui joint deux points A, B, de cette figure. Soient A'B' la position que prend la droite AB au bout d'un temps infiniment petit; O le point de rencontre des perpendiculaires élevées aux milieux I et K des chemins élémentaires AA', BB'. De l'égalité des triangles AOB, A'OB' qui ont leurs trois côtés respectivement égaux, résulte celle des angles BOB', AOA' et l'on voit ainsi que *le mouvement le plus général d'une figure plane peut à chaque instant être considéré comme se faisant autour d'un point actuellement fixe* O, et nommé pour ce motif *centre instantané de rotation.*

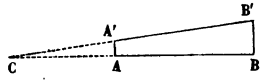
Fig. 20.



REMARQUE. — Si les déplacements AA', BB', sont parallèles et obliques à AB, ils sont égaux; car la projection de A'B' sur AB étant égale à cette dernière droite, en négligeant les termes du second ordre, il faut nécessairement que les projections semblables de AA', BB' soient aussi égales, et le mouvement se réduit à une simple translation.

Dans le cas où les chemins élémentaires AA', BB' (*fig.* 21) sont perpendiculaires à AB, ils peuvent être inégaux, mais alors le centre instantané se trouve évidemment au point de rencontre C de AB, A'B'. On voit de plus qu'en substituant à l'un des points A et B un point M extérieur à AB, on rentre dans le cas général.

Fig. 21.



78. *Conséquences diverses.* — Il résulte de ce qui précède que : 1° les différents points de la figure mobile décrivent simultanément des éléments proportionnels à leur distance au centre instantané; 2° les normales correspondant à ces divers éléments vont toutes concourir à ce centre; 3° la connaissance de la vitesse V de l'un de ces points, situé

à la distance r du centre O, suffit pour déterminer la vitesse angulaire instantanée $\omega = \frac{V}{r}$, par suite la vitesse d'un point quelconque.

79. Soient, à un instant donné, O le centre instantané de rotation, O_1, O_2, O_3,... les positions successives des centres instantanés sur le plan fixe, O'_1, O'_2, O'_3,... les positions correspondantes des mêmes points sur le plan de la figure mobile. Au bout du temps infiniment petit dt, le point O'_1 viendra en O_1 ; mais comme ce déplacement ne peut s'effectuer qu'autour du centre instantané O, il s'ensuit que la courbe $OO'_1O'_2$... roule sur la courbe fixe OO_1O_2...; en d'autres termes, *le mouvement le plus général d'une figure invariable se réduit à un roulement d'une courbe sur une autre.* La courbe fixe est le lieu des positions successives des centres instantanés, et la courbe mobile est le lieu des points du plan de la figure mobile qui successivement deviennent centres instantanés.

On voit ainsi que la courbe décrite par un point déterminé de la figure invariable appartient à la grande classe des épicycloïdes, dont les propriétés ont beaucoup occupé Descartes, Rœmer, Roberval, de la Hire, etc.

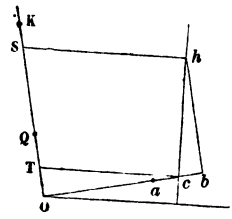
80. *Application à la géométrie.* — 1° Supposons que l'on veuille mener la tangente ou la normale à la courbe décrite par un point m d'une figure invariable dont deux points a et b sont assujettis à parcourir deux lignes données. Il est clair que la normale cherchée s'obtiendra en joignant le point m au point de rencontre c des normales aux deux courbes fixes en a et b. Dans le cas où les lignes données sont des droites, le point m décrit une ellipse, à laquelle on sait ainsi mener la normale.

2° Lorsque le mouvement de la figure est défini par la condition qu'une ligne aO, tracée sur cette figure, passe constamment par un point fixe O et qu'un point b de la fi-

gure parcoure une ligne donnée *mn*, le centre instantané S est déterminé par la rencontre des normales en *b* à *mn* et en O à O*a*. Car il est clair que le déplacement élémentaire du point de la ligne *a*O qui se trouve actuellement en O ne peut avoir lieu que suivant la tangente à cette ligne.

Cette dernière remarque est notamment applicable à la *Conchoïde* et à la *Cissoïde*. La première de ces courbes, comme on le sait, est engendrée par deux points *b* et *a* (*fig.* 22) d'une droite assujettie à passer par un point fixe O; le point milieu *c* de *ab* devant lui-même parcourir une droite donnée *ch*. Le centre instantané se trouvera ainsi à l'intersection T des perpendiculaires à O*c* et *ch* menées en O et *c*.

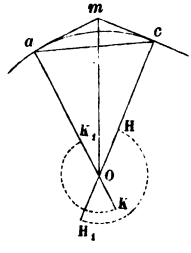
Fig. 22.



La cissoïde est engendrée par le sommet *b* d'un angle droit dont l'extrémité *h* d'un côté de longueur déterminée décrit une droite *ch*, et dont l'autre côté indéfini est assujetti à passer par un point fixe O, et l'on voit que le centre instantané se trouve à l'intersection S des perpendiculaires en O et *h* à O*c* et *ch*.

Comme dernier exemple, proposons-nous de mener la tangente à la courbe décrite par le sommet *m* (*fig.* 23) d'un angle constant *amc*, circonscrit à une courbe. Les points *a* et *c* des côtés de l'angle, actuellement en contact avec la courbe, ne pouvant se déplacer que tangentiellement à cette courbe, le centre instantané O se trouve au point de rencontre des normales en *a* et *c*, et la normale O*m*, à la courbe décrite, est dès lors déterminée. On peut même se dispenser de mener les normales en *a* et *c*, car la tangente en *m* est évidemment tangente au cercle circonscrit au qua-

Fig. 23.

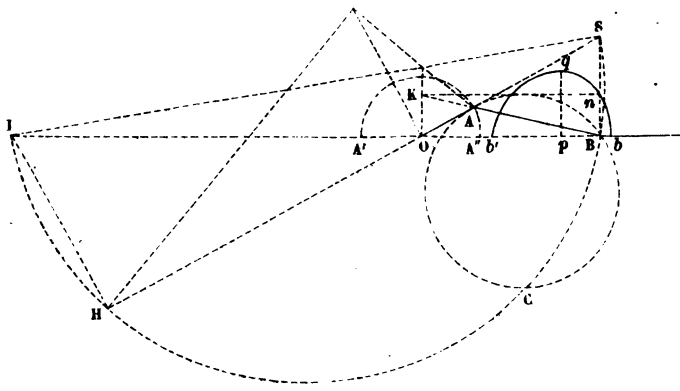


drilatère $aOcm$, ou au segment capable de l'angle m décrit sur la corde ac.

81. *Applications à quelques transformations de mouvement.*

1° *Bielles et manivelles.* — Soient OA, AB (*fig.* 24)

Fig. 24.



les axes de figure d'une manivelle mobile autour d'un axe projeté en O, et d'une bielle dont l'extrémité B est assujettie à glisser le long de la droite OB. Le centre instantané de AB se trouvera évidemment au point de rencontre S de OA prolongée avec la perpendiculaire élevée en B à OB. Si ω est la vitesse angulaire de la manivelle, r le rayon de la circonférence décrite par le centre A de son bouton, la vitesse du point A étant ωr, la vitesse angulaire intantanée autour de S sera

$$\frac{\omega r}{SA},$$

la vitesse du point B,

$$V = \omega r . \frac{SB}{SA},$$

et celle d'un point quelconque m de la bielle,

$$\omega r . \frac{Sm}{SA}.$$

On peut mettre V sous une forme plus commode; prolongeons pour cela AB jusqu'à sa rencontre K avec la perpendiculaire en O à OB. Les triangles semblables KOA, SAB donnent

$$\frac{SB}{SA} = \frac{KO}{AO},$$

d'où

$$V = \omega \,.\, OK.$$

Cette expression fait voir que la vitesse V, nulle aux *points morts* b, b', situés sur OB, est égale à celle du centre du bouton de la manivelle lorsque cette dernière est perpendiculaire à la direction du mouvement rectiligne.

En menant, par le point K, une parallèle à OB jusqu'à sa rencontre n avec BS, et opérant de même pour toutes les positions du point B, on obtient une courbe bnb' qui représente géométriquement la loi des vitesses du point B dans l'hypothèse de ω constant, et dont le tracé permet de trouver approximativement la position du point q pour lequel la vitesse $V = \omega . pq$ est maximum, et qui correspond au point de la courbe pour lequel la tangente est parallèle à OB.

Soient α l'angle AOB, β l'angle ABO, $l =$ AB, la longueur de la bielle, m le rapport $\frac{r}{l}$ de la longueur de la manivelle à celle de la bielle; on a

$$\sin\beta = \frac{r}{l}\sin\alpha = m\sin\alpha, \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

$$OK = r\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = r(\sin\alpha + \cos\alpha \operatorname{tang}\beta),$$

$$\omega . OK = \omega r\left(\sin\alpha + \frac{m}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\alpha}}\right).$$

La vitesse moyenne pour une demi-révolution sera

$$\frac{\omega r}{\pi}\left(\int_0^\pi \sin\alpha\, d\alpha + \frac{m}{2}\int_0^\pi \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\alpha}}\, d\alpha\right).$$

La seconde intégrale est nulle; car pour deux valeurs supplémentaires de α, l'élément de l'intégrale prend des valeurs égales et de signes contraires, de sorte que la vitesse moyenne est tout simplement $\frac{2\omega}{\pi} r$.

Le maximum de $V = \omega . OK$ sera donné par

$$\cos\alpha + \frac{m}{2}\left\{\frac{2\cos 2\alpha(1 - m^2\sin^2\alpha) + \frac{1}{2}m^2\sin^2 2\alpha}{(1 - m^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\right\} = 0.$$

En général m est une fraction assez faible qui souvent ne dépasse pas $\frac{1}{7}$ ou $\frac{1}{8}$. On peut donc dans une première approximation négliger m^2 devant l'unité; il vient ainsi

$$\cos\alpha + m\cos 2\alpha = 0,$$

ou

$$\cos\alpha + 2m\cos^2\alpha - m = 0.$$

En négligeant m, on trouve

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Posons $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$; ε étant du même ordre de grandeur que m, on doit négliger les termes en ε^2, $m\varepsilon$, et on trouve

$$\varepsilon = -m,$$

par suite

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - m.$$

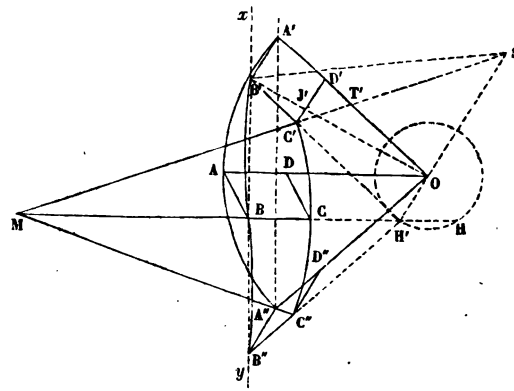
La valeur correspondante de $\omega . OK$ est avec la même approximation ωr. De sorte que l'obliquité de la bielle n'influe sur le maximum de la vitesse que par les termes de l'ordre de m^2.

2° *Du parallélogramme de Watt.* — La disposition employée dans les machines à vapeur de Watt pour transmet-

tre au balancier le mouvement alternatif du piston, jouit de propriétés curieuses, sur lesquelles nous allons nous arrêter quelques instants.

Soient OA (*fig.* 25) l'axe de figure du balancier dans sa

Fig. 25.



position horizontale; O la projection de l'axe horizontal de rotation sur le plan vertical passant par OA; OA', OA'' les positions extrêmes de l'axe de figure du balancier, symétriquement placées par rapport à OA; xy la verticale suivant laquelle doit se mouvoir la tige du piston. On s'arrange de manière que xy passe à égale distance du point A et de la corde A'A'' de l'arc total que décrit l'extrémité du balancier.

La tige du piston est reliée par une articulation au sommet B d'un parallélogramme, à sommets articulés, formés par les trois verges AB, BC, CD, et par l'axe OA du balancier, et dont A'B'C'D', A''B''C''D'' sont les positions extrêmes.

La figure A'B'B''A'' étant un parallélogramme, on a A'A'' = B'B'', d'où l'on déduit que : 1° *Pour deux positions du balancier, symétriques par rapport à l'horizontale passant par son centre de rotation, les côtés du parallélogramme qui lui sont immédiatement articulés*

sont parallèles; 2° *la course du piston est égale à la corde de l'arc total décrit par l'extrémité du balancier.*

Le sommet B étant assujetti à parcourir la ligne xy, la figure du parallélogramme est, à chaque instant, complétement déterminée, et le point C décrit une courbe qu'il est facile de construire par points, en effectuant la construction du parallélogramme pour plusieurs positions intermédiaires du balancier. L'épure montre que cette courbe diffère très-peu du cercle passant par les trois points C, C′, C″. Si l'on admet, pour un instant, que ces deux lignes se confondent, il suffira, pour assurer le mouvement rectiligne de B, d'assujettir le point C à se mouvoir sur le cercle C′CC″; ce qu'on réalisera au moyen d'une tige MD articulée d'une part à ce point, et de l'autre au centre M supposé fixe du cercle ci-dessus; cette tige porte le nom de *contre-balancier.*

Mais comme le cercle C′CC″ ne se confond pas rigoureusement avec la courbe qui serait tracée par le point C, il en résulte que le sommet B ne décrit pas exactement xy, mais une courbe en S très-allongée, qui diffère très-peu de la verticale, ce qui, par cela même, ne donne lieu à aucun inconvénient pratique.

Cette courbe, dite *à longue inflexion*, passe un peu à gauche de xy entre B′ et B, et un peu à droite de B en B″. On peut la construire par points en traçant la forme que doit affecter le parallélogramme pour plusieurs positions intermédiaires du balancier. Mais on peut y arriver plus simplement en remarquant que si l'on mène la parallèle OH′ à C′D′ jusqu'à sa rencontre H′ avec B′C′ prolongé, le point H′, situé à une distance constante de C′, se meut constamment sur la circonférence décrite du point O comme centre avec un rayon égal à C′D′ ou CD; les extrémités de l'arc qu'il parcourt sont H′ et le point d'intersection H de BC prolongé avec cette circonférence. On voit ainsi que *la courbe décrite par le point* B *ou* B′ *fait partie du lieu géométrique engendré par un point déterminé* B′ *d'une droite*

dont deux autres points également déterminés C′ *et* H′ *s'appuient constamment sur deux circonférences données* MC′, OH′. On aura autant de points que l'on voudra de cette courbe, en marquant trois points b, c, h sur l'arête d'une bande de papier, tels que l'on ait $bc = \mathrm{BC}$, $ch = \mathrm{CH}$, puis en faisant mouvoir cette bande sur la figure, de manière que les points h et c restent constamment sur les arcs respectifs HH′, C′C″; les positions successives que prendra le point b appartiendront à la courbe cherchée. Si l'on désire avoir le lieu complet, on pourra employer le même procédé, en faisant sortir les points h et c de leurs limites respectives H et H′, C′ et C″ qu'on leur avait assignées sur les circonférences OH′ et MC.

Le centre instantané S′ de la droite B′H′, dans chacune de ses positions, se trouve évidemment au point d'intersection des droites MC′ et OH′ prolongées; et l'on obtient géométriquement la normale au point B′ de la courbe à longue inflexion en menant B′S′.

Le centre instantané T′ de C′D′ est de même déterminé par la rencontre de C′M et de OA′.

Cela posé, cherchons à déterminer la vitesse angulaire ω du balancier, variable avec sa position, connaissant la vitesse correspondante V du piston ou du point B′.

La vitesse angulaire autour du centre S′ étant $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{S'B'}}$, la vitesse du point C′ est $\mathrm{V}\cdot\frac{\mathrm{S'C'}}{\mathrm{S'B'}}$, et la vitesse angulaire instantanée autour de T′, $\mathrm{V}\cdot\frac{\mathrm{S'C'}}{\mathrm{C'T'}.\mathrm{S'B'}}$ ou $\mathrm{V}\cdot\frac{\mathrm{OD'}}{\mathrm{D'T'}.\mathrm{S'B'}}$, en raison du parallélisme des droites C′D′ et OS′; on déduit de là pour la vitesse du point D′, $\mathrm{V}\cdot\frac{\mathrm{OD'}}{\mathrm{S'B'}}$, et pour la vitesse angulaire autour du point O,

$$\omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{S'B'}},$$

d'où

$$V = \omega . S'B'.$$

On a ainsi ce théorème :

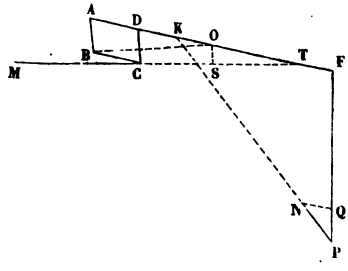
La vitesse de la tige du piston est égale au produit de la vitesse angulaire du balancier par la distance de l'articulation de la tige du piston et du parallélogramme, au point de rencontre du contre-balancier prolongé, avec la parallèle menée, par le centre de rotation du balancier, aux côtés du parallélogramme articulés à ce dernier.

Le problème proposé se résout donc au moyen d'une construction géométrique très-simple.

La droite qui joint les points O et B′ rencontre le côté C′D′ en un point J′ fixe sur ce côté pour tous déplacements du balancier qui décrit une courbe semblable à celle du point B′ et semblablement placée, et qui, par conséquent, se confond sensiblement avec la verticale. Cela tient à ce que les triangles A′B′O, D′J′O étant semblables, D′J′ est constant et que OJ′ est proportionnel à OB′. Le parallélogramme permet donc au balancier d'imprimer un mouvement vertical à une tige articulée au point J′ de C′D′, dont la vitesse est à V dans le rapport de OJ′ à OB′. Cette tige sert ordinairement à mettre en jeu la pompe à air de la machine.

Le mouvement circulaire alternatif du balancier dans les machines de Watt est transformé en circulaire continu autour d'un axe parallèle projeté en N (*fig.* 26) au moyen d'une manivelle NP mobile autour de ce dernier, reliée par une bielle PF à l'extrémité F du balancier opposée à celle à laquelle est adapté le parallélogramme.

Fig. 26.



La figure ci-jointe (dans laquelle, pour représenter les mêmes points, on a conservé les lettres de la figure précédente moins les accents) représente ce système dans une position quelconque. Le centre instantané de la bielle se trouve évidemment au point de rencontre K des axes de figure du balancier et de la manivelle; la vitesse en F étant $\omega.OF$, la vitesse angulaire instantanée autour de K est $\omega \cdot \frac{OF}{KF}$ et la vitesse du point P

$$\omega \cdot \frac{OF}{KF} \cdot PK = \omega'.PN,$$

en appelant ω' la vitesse angulaire de la manivelle autour du centre N. Menons NQ parallèle à OF jusqu'à sa rencontre avec PF, les triangles semblables NQP, KFP donnent

$$\frac{PK}{KF} = \frac{PN}{QN},$$

et il vient par suite pour la vitesse angulaire de la manivelle

$$\omega' = \omega \frac{OF}{QN}.$$

Cette formule ne s'applique qu'en dehors des points morts qui correspondent nécessairement aux positions extrêmes du balancier, car le mode de liaison entre le balancier et la manivelle, duquel elle est tirée, est dans ces circonstances exceptionnelles incompatible avec la transmission du mouvement à exécuter et qui serait dès lors complétement interrompue si la manivelle ne dépassait les points morts en vertu de la propriété de la matière, connue sous le nom d'*inertie*, et dont nous n'avons pas à nous occuper.

Nous ne nous arrêterons pas aux détails de construction de l'ensemble de pièces que nous venons d'étudier, ni des dispositifs qui en dérivent employés sur les bateaux à vapeur, dans l'établissement des pompes d'épuisement

des mines, etc.... Nous ne pouvons que renvoyer pour cet objet aux Traités spéciaux de Mécanique pratique.

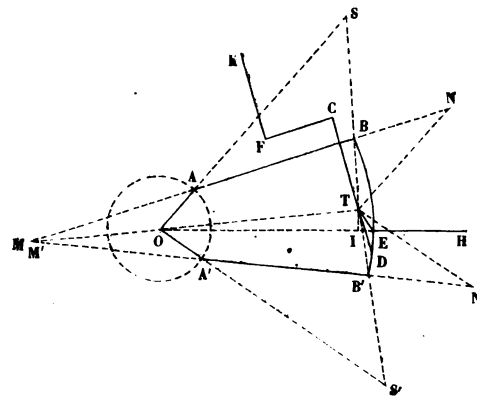
3° *Coulisse Stephenson.* — Dans les locomotives, pour faire varier dans certaines limites la course de la tige du tiroir, on monte, sur l'essieu moteur, deux excentriques circulaires, de même diamètre et généralement coulés d'une seule pièce. Les extrémités des bielles qu'ils conduisent sont respectivement articulées à celles d'une *coulisse* dans laquelle s'engage un *coulisseau* qui termine la tête du piston. Si les excentriques sont diamétralement opposés, les extrémités de la coulisse doivent marcher en sens contraire; et l'on comprend ainsi comment (à l'aide d'un système de leviers à la portée du mécanicien, pour relever ou abaisser la coulisse de manière que le coulisseau occupe une position plus ou moins rapprochée de ses extrémités), il est possible de faire varier la course du tiroir, et de changer le sens de son mouvement.

Il est bon de faire remarquer que dans la réalité les rayons partant de l'axe de rotation et aboutissant aux centres des excentriques font entre eux un angle qui diffère de 180° d'un nombre de degrés, dont la moitié mesure ce que l'on nomme l'*angle de calage* ou *d'avance ;* mais les considérations suivantes, qui sont dues à M. Phillips, sont indépendantes de l'angle que forment les deux excentriques.

Soient OA, OA′ (*fig.* 27), les positions contemporaines des axes de figure des deux excentriques, mobiles autour du centre O; AB, A′B′ les bielles qui les relient à la coulisse BB′; CD la dernière branche du levier articulé, qui sert à déplacer la coulisse avec laquelle il s'articule en D : cette branche, appelée *bielle de suspension* ou *de relevage,* est mobile autour du point C du levier coudé KFC dont l'axe de rotation est en F, et qui reste fixe pendant le mouvement de la coulisse pour la position considérée au point D. Soient de plus E la tête de la tige EH du tiroir dont la di-

rection passe par le point O, et ω la vitesse angulaire autour de ce point.

Fig. 27.



Le centre instantané de la coulisse, qu'il s'agit de déterminer, se trouve en un certain point T de CD; en le supposant connu, le centre instantané de AB sera déterminé par l'intersection S des prolongements de OA et BT; celui de A'B' se trouve de même au point de rencontre S' des directions de OA' et TB'. Il suit de là que la vitesse angulaire autour de S est exprimée par $\omega \cdot \frac{OA}{AS}$, que la vitesse du point B est $\omega \cdot \frac{OA}{AS} \cdot SB$, et qu'enfin la vitesse angulaire ω' de la coulisse autour de T a pour expression

$$\omega' = \omega \cdot \frac{OA}{AS} \cdot \frac{SB}{TB}.$$

On a de même

$$\omega' = \omega \cdot \frac{OA'}{A'S'} \cdot \frac{S'B'}{TB'},$$

par suite

$$\frac{OA}{AS} \cdot \frac{SB}{TB} = \frac{OA'}{A'S'} \cdot \frac{S'B'}{TB'},$$

d'où

$$\frac{AS.TB}{SB} : \frac{A'S'.TB'}{S'B'} :: OA : O'A'.$$

Soient M, M′ les points de rencontre de TO avec les prolongements de AB, A′B′; TN, TN′, les parallèles à OA, OA′ menées par le point T et limitées respectivement en N et N′ aux prolongements de AB, A′B′. Les triangles semblables TNB, ASB donnent

$$TN = \frac{AS.TB}{SB};$$

on a de même

$$TN' = \frac{A'S'.T'B'}{S'B'};$$

par suite

$$TN : TN' :: OA : OA',$$

ce qui exige que les points M et M′ se confondent.

Donc, *en joignant le point de rencontre des directions des bielles à la projection de l'axe de rotation, on obtient une droite dont l'intersection avec la bielle de suspension détermine le centre instantané de rotation de la coulisse.*

Le point T étant connu, on a pour la vitesse du point E,

$$\omega'.TE = \omega \cdot \frac{OA.TE}{TN},$$

dont la composante V, parallèle à EH, est la vitesse de la tige.

Si TI est la perpendiculaire abaissée du point T sur OE, on a

$$V = \omega \cdot \frac{OA.TI}{TN},$$

et une quatrième proportionnelle permettra de déterminer à chaque instant la vitesse du tiroir.

La *coulisse renversée* employée depuis quelques années pour opérer la distribution de la vapeur dans les locomo-

tives présente sa convexité aux excentriques; son point milieu est assujetti à se déplacer dans la direction même de la tige du tiroir, par suite d'une disposition particulière des glissières. La tige du tiroir est articulée à une bielle, dont l'autre extrémité, munie d'un coulisseau, s'engage dans la coulisse où l'on peut lui faire occuper successivement diverses positions en déplaçant la bielle de relevage qui s'articule au coulisseau. Le rayon de la coulisse est nécessairement égal à la longueur de la bielle qui relie la tige du tiroir à la coulisse.

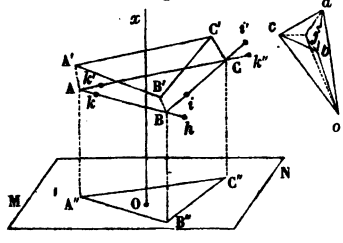
Pour obtenir le centre instantané de la coulisse, il faut supposer sur la figure, en outre du renversement de position de cet organe, que le point D en est le milieu, que CD est perpendiculaire à la droite qu'il décrit, et que C est à l'infini. Le centre instantané se trouve dès lors au point de rencontre de la droite MO avec la perpendiculaire en D à la direction de OD.

§ III. — Du Mouvement le plus général d'un Système invariable.

82. La position dans l'espace d'un système invariable est complétement définie par celle de trois quelconques de ses points; de sorte que l'on est ramené à la considération d'un triangle mobile dans l'espace.

Les vitesses des trois sommets ne peuvent pas être prises arbitrairement, elles ont entre elles des relations déterminées qu'il importe d'abord de connaître.

Fig. 28.



Soient ABC, A′B′C′ (*fig.* 28) deux dispositions consécutives du triangle; V, V′, V″ les vitesses des

trois sommets A, B, C, du triangle; on a

$$AA' = V\,dt, \quad BB' = V'\,dt, \quad CC' = V''\,dt.$$

La projection de A′B′ sur AB étant égale à AB, en négligeant les quantités du second ordre, les projections de AA′ et BB′, par suite celles de V, V′, sur la même direction sont égales et de même sens. Donc *lorsqu'un triangle se meut dans l'espace, les projections des vitesses de deux sommets sur le côté adjacent sont égales entre elles et de même sens.*

On peut se donner arbitrairement la vitesse V de l'un des sommets A; soient k, k' les projections de l'extrémité de la droite qui la représente sur AB, AC; portant $Bh = Ak$ sur le prolongement de AB, la vitesse du point B pourra être représentée par toute droite partant de ce point et limitée au plan mené par le point h, perpendiculairement à AB. Soient i la projection de l'extrémité de V′ sur BC, $Ci' = Bi$ pris sur le prolongement de BC et $Ck'' = Ak'$ porté sur le prolongement de AC. La vitesse V″ pourra être représentée par toute droite partant du point C et aboutissant à l'intersection des plans perpendiculaires à AC, BC menés par les points k'' et i'.

Cela posé, concevons que par un point o choisi arbitrairement on mène les droites oa, ob, oc, égales et parallèles à V, V′, V″; joignons le pied j de la perpendiculaire abaissée du point o sur le plan abc, aux trois points a, b, c. Les vitesses V, V′, V″ peuvent être considérées comme les résultantes de la vitesse commune $oj = U$, et des vitesses respectives aj, bj, cj; de sorte que si l'on imprime au système ABC une vitesse égale et contraire à U, de manière à détruire cette dernière, il ne pourra plus se mouvoir que parallèlement à un plan MN parallèle à abc; et son mouvement sera le même que celui de sa projection A″B″C″, sur ce plan, qui reste invariable pour ce déplacement, ou autrement les vitesses des points A″, B″, C″ seront respec-

tivement *aj*, *bj*, *cj*. Or nous avons vu (77) que le mouvement d'une figure invariable A″B″C″ mobile dans son plan peut être considéré à chaque instant comme résultant d'une rotation autour d'un point O, appelé *centre instantané de rotation*. Donc le mouvement actuel de ABC sera à l'instant considéré un mouvement de rotation autour de l'axe Ox perpendiculaire à MN ou parallèle à U; et en restituant la vitesse de translation U, supprimée par la pensée pour la démonstration, on voit que le déplacement réel de ABC résulte de deux mouvements simultanés, l'un de translation parallèle à Ox, l'autre de rotation autour de cette droite, appelée pour cette raison *axe instantané de rotation et de glissement*.

Si, au lieu de prendre la droite *oj* perpendiculaire au plan *abc*, on l'avait prise oblique à ce plan, la rotation aurait toujours eu lieu autour d'un axe perpendiculaire à *abc*, mais non plus parallèle à la translation. On peut donc dire que *le mouvement le plus général d'un système invariable peut être à chaque instant considéré comme résultant d'une translation de direction quelconque et d'une rotation autour d'un axe dont la direction reste la même quelle que soit celle de la translation.*

Remarque. — Si *oa*, *ob*, *oc* sont situées dans un même plan, la démonstration ci-dessus n'est pas en défaut, car le système ABC, ne pouvant alors se déplacer que parallèlement au plan *aob*, peut être considéré comme tournant à l'instant actuel autour d'un axe instantané perpendiculaire à ce plan; le glissement est alors nul.

Si le système invariable est assujetti à tourner autour d'un point fixe C, *oc* est nul, et l'axe instantané passant par le point C est perpendiculaire au plan *aob*.

2° La démonstration est réellement en défaut lorsque les droites *oa*, *ob*, *oc* sont parallèles entre elles. Les chemins élémentaires AA′, BB′, CC′ sont égaux si leur direction n'est perpendiculaire à aucun des côtés AB, BC, AC et le

mouvement se réduit à une simple translation; mais si cette même direction est perpendiculaire à BC, par exemple, le centre instantané de cette droite mobile dans le plan BCB′C′ se trouve sur sa direction; or on peut substituer (77) au point C, par exemple, un point D du système compris dans ce plan et extérieur à CB, et pour lequel la vitesse n'est plus parallèle à BB′; alors on rentre dans le cas examiné ci-dessus où les vitesses *oa*, *ob*, *od*, sont dans un même plan *aod*.

3° On démontrera facilement, en employant un raisonnement analogue à celui du n° 79, que le mouvement le plus général d'un système invariable se réduit à un roulement de deux surfaces réglées l'une sur l'autre, accompagné d'un glissement le long de la génératrice de contact.

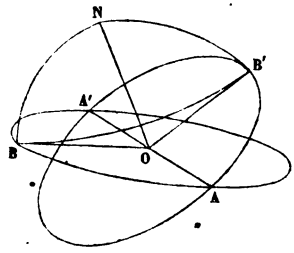
83. Le mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe se ramène évidemment à celui d'une figure sphérique sur la sphère ayant ce point pour centre, cas pour lequel la démonstration relative aux mouvements plans est applicable, en remplaçant les droites par des arcs de grand cercle; et l'on arrive ainsi à la détermination d'un *pôle instantané* de rotation qui, joint au point fixe, détermine l'axe intantané de rotation (*).

Pour montrer l'utilité de cette dernière considération, nous prendrons pour exemple le *joint universel*, imaginé par Cardan, qui a pour objet de transformer un mouvement de rotation autour d'un axe en un mouvement autour d'un autre axe qui rencontre le précédent; les arbres correspondant à ces deux axes se terminent chacun par une fourchette; dans les branches de ces fourchettes viennent s'engager des tourillons, dont le système invariable forme une

(*) La découverte du pôle instantané de rotation est due à Euler. Elle a précédé celle du centre instantané de rotation des figures planes mobiles dans leur plan, à laquelle cependant elle a dû naturellement conduire en considérant le plan comme une sphère d'un rayon infini.

sorte de croix à branches rectangulaires égales entre elles. Les extrémités de chaque tourillon décrivent ainsi une circonférence de cercle perpendiculaire à son axe de rotation; le centre du croisillon coïncide avec celui des deux circonférences, et avec celui de la sphère qu'elles déterminent et sur laquelle les deux branches du croisillon interceptent un arc de grand cercle égal à un quadrant. Soient AA′ (*fig.* 29) l'intersection des plans des deux circonférences; BB′ le quadrant mobile dont on vient de parler; A l'angle dièdre BAA′B′; N l'intersection des arcs de grands cercles perpendiculaires en B, B′ aux arcs AB, AB′; α, α' les angles correspondant aux arcs AB, AB′; ON sera l'axe instantané de rotation. Appelant ω, ω' les vitesses angulaires autour des deux axes, et remarquant que les distances de B, B′ à ON sont proportionnelles aux sinus des arcs BN, B′N, il vient par les propriétés des triangles sphériques

Fig. 29.



$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin B'N}{\sin BN} = \frac{\sin NBB'}{\sin NB'B} = \frac{\cos B'BA}{\cos BB'A}.$$

Or le triangle BAB′ donne, en appelant B et B′ les angles dièdres correspondant aux sommets B et B′ dans le triangle sphérique B′BA,

$$\cos\alpha' = \sin\alpha\cos B, \quad \cos\alpha = \sin\alpha'\cos B',$$

d'où

$$\frac{\cos B}{\cos B'} = \frac{\sin\alpha'\cos\alpha'}{\sin\alpha\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\alpha}.$$

On a d'ailleurs

$$(1) \qquad \operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\alpha' = -\frac{1}{\cos A},$$

par suite

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{-\cos A\,(1+\cot^2\alpha)}{\cos^2 A + \cot^2\alpha}.$$

La transmission n'est plus possible lorsque $A > 90^\circ$, ce qui est évident d'après sa nature même.

En différentiant (1), on a

$$\frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} = -\frac{d\alpha'}{dt} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha'},$$

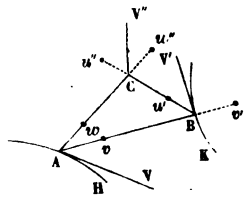
et comme $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$, $\omega' = -\frac{d\alpha'}{dt}$,

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha'},$$

ce qui est conforme au résultat obtenu plus haut d'une autre manière.

84. *Construire la tangente à la courbe décrite par un point* D *d'un système invariable* (*fig.* 30) *dont deux points* A *et* B *sont assujettis à parcourir deux courbes fixes* AH, BK, *et dont un troisième point* C *reste constamment sur une surface donnée.*

Fig. 30.



Il est évident que pour chaque position du point A, celle du tétraèdre ABCD, et par suite celle du point D, est complétement déterminée.

Nous supposerons que les constructions suivantes sont exécutées en projection sur deux plans rectangulaires.

Prenons, à partir du point A, sur la tangente en ce point à la courbe AH une longueur arbitraire AV qui en mesurera la vitesse, et dont la projection sur AB est représentée par Av. Portant sur AB prolongé et à partir du point B la longueur $Bv' = Av$, et l'intersection de la tangente en B à la courbe BK, avec le plan mené en v' perpendiculairement à AB, déterminera la vitesse BV′ du point B. Soient w, u' les projections des points V, V′ sur AC, BC; Cw'', Cu'' des longueurs respectivement égales à Aw, Bu', portées à par-

tir du point C sur les prolongements de AC et BC. Les plans menés en w'', u'' perpendiculairement à ces dernières droites, et le plan tangent en C à la surface directrice, se couperont en un point V″, et CV″ représentera la vitesse du point C en grandeur et en direction. L'axe instantané de rotation et de glissement se construira ainsi qu'on l'a vu plus haut (82), et l'on obtiendra en même temps la vitesse de glissement et la vitesse angulaire instantanée; on déterminera facilement, par suite, la vitesse du point D.

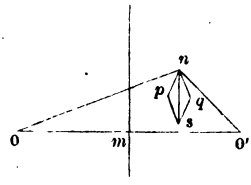
§ IV. — Composition des Translations, des Rotations.

85. *Composition des translations.* — Il est clair que si un solide est animé de plusieurs translations simultanées, la vitesse, dans la translation résultante, est la résultante des vitesses composantes, et l'accélération dans le mouvement résultant est la résultante des accélérations partielles.

86. *Composition des rotations autour d'axes parallèles.* — Considérons un système invariable mobile autour d'un axe qui tourne lui-même autour d'un axe parallèle fixe dans l'espace. Le mouvement résultant comme les mouvements composants étant parallèles à tout plan perpendiculaire à la direction des axes, on est ramené à étudier le déplacement d'une figure plane mobile dans son plan tournant autour de l'un de ses points, et autour d'un autre point fixe sur le plan.

Soient O, O′ (*fig.* 31) le centre mobile et le centre fixe; ω, ω' les vitesses angulaires correspondantes, que nous supposerons de même sens, de gauche à droite par exemple.

Fig. 31.



Tout point m de la ligne OO′ sera animé de deux vitesses $\omega.\mathrm{O}m$, $\omega'.\mathrm{O}'m$ de sens contraires, et il est clair

qu'il existera une position de ce point pour laquelle on aura $\omega . Om = \omega' . O'm$, et qui sera le centre instantané de rotation à l'instant considéré. Si Ω est la vitesse angulaire instantanée, on a, en égalant entre elles les deux expressions de la vitesse du point O,

$$\omega' \times OO' = \Omega . Om,$$

d'où

$$\Omega = \omega + \omega'.$$

Enfin on a

$$\Omega : \omega : \omega' :: OO' : O'm : Om.$$

Donc *deux rotations autour d'axes parallèles de même sens se composent en une seule égale à leur somme, et dont l'axe, parallèle aux deux autres et situé dans leur plan, divise la distance de ces derniers en raison inverse des rotations correspondantes.*

Supposons maintenant que les deux rotations soient de sens contraires, par exemple que ω supérieur à ω' ait lieu de la gauche vers la droite, ω' de la droite vers la gauche. Il y aura en général sur le prolongement de OO' à gauche de O un point m pour lequel on aura $\omega . Om = \omega' . O'm$; et si Ω est la vitesse angulaire instantanée autour de m, on aura $\Omega . Om = \omega' . O'm$, d'où

$$\Omega = \omega - \omega'.$$

Si $\omega = \omega'$, Om est infini et Ω nulle; il n'y a plus dans ce cas de centre instantané. Mais alors le mouvement se réduit à une simple translation; car soient n un point de la figure, $np = \omega . On$, $nq = \omega' . O'n$ ses vitesses autour de O, O', ns la résultante de ces vitesses; les triangles OnO', pns étant semblables, ns est perpendiculaire à OO' et égale à la quantité constante $\omega . OO'$.

Donc *deux rotations de sens contraire autour d'axes parallèles se composent en une seule égale à leur différence, dont l'axe, parallèle aux précédents et situé dans*

leur plan, se trouve en dehors de l'intervalle qui les sépare. Les distances de l'axe résultant aux deux autres sont en raison inverse des rotations correspondant à ces derniers.

Si les deux vitesses angulaires composantes sont égales, le mouvement se réduit à une translation perpendiculaire au plan des axes et égale au produit de leur distance par la vitesse angulaire commune.

87. Il est facile maintenant de composer entre elles des rotations parallèles en nombre quelconque. On considérera leur ensemble comme formant deux groupes pour chacun desquels les rotations seront de même sens, les rotations de l'un étant de sens contraire à celles de l'autre.

Considérons l'un de ces groupes; on composera deux des rotations qui en font partie, ω, ω' en une seule $\omega_1 = \omega + \omega'$ d'après la première règle établie au n° 86, puis ω_1 avec une troisième ω'' en une seule $\omega_2 = \omega_1 + \omega'' = \omega + \omega' + \omega''$, et ainsi de suite. On arrivera ainsi à une rotation finale Ω, égale à la somme $\omega + \omega' + \omega'' \ldots$ des composantes. Soit Ω' la résultante des rotations du second groupe; si Ω est différent de Ω', ces deux rotations se composeront en une seule, égale à leur différence ou *à la somme algébrique des rotations proposées.*

Mais si $\Omega = \Omega'$, ou si la somme ci-dessus est nulle, le mouvement se réduit à une simple translation.

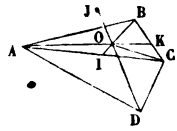
Il est clair, d'ailleurs, d'après la nature même de la question, que l'on doit arriver au même résultat, quel que soit l'ordre adopté dans la composition.

On conçoit facilement comment on peut décomposer une relation en deux autres autour d'axes parallèles au premier et compris dans un même plan avec lui; selon la position rotative des axes, les rotations composantes seront de même sens ou de sens contraire. Ce problème est complétement déterminé.

On ne peut de même décomposer que d'une seule ma-

nière une rotation en trois autres autour d'axes parallèles au sien. Soient, en effet, A, B, C (*fig.* 32), les traces de ces trois axes sur un plan perpendiculaire à leur direction; O la trace de l'axe de la rotation donnée ω. Nous supposerons, par exemple, que le point O se trouve dans l'intérieur du triangle ABC. Joignons le point B au point O et prolongeons la droite BO jusqu'au point I où elle coupe AC; on arrivera au résultat cherché en décomposant la rotation ω en deux autres, l'une $\omega_1 = \omega . \frac{OI}{BI}$ autour de l'axe B, l'autre $\omega . \frac{OB}{BI}$ autour d'un axe projeté en I, et cette dernière en deux autres ω_2, ω_3, autour des axes A et C.

Fig. 32.



Cette décomposition est unique, car il faut que la résultante de ω_2, ω_3 passe par le point I, pour que, composées avec ω_1, elles donnent ω.

On remarquera que

$$\omega_1 : \omega :: OI : BI :: \text{triangle AOB} : \text{triangle ABC}.$$

C'est-à-dire que *si l'aire du triangle ayant pour sommets les trois traces des axes des rotations composantes représente la rotation totale, chaque rotation partielle est représentée par l'aire du triangle déterminé par le côté du triangle ci-dessus, opposé à la trace de son axe, et par la trace de l'axe de la rotation totale.*

Le problème est indéterminé si le nombre des rotations partielles surpasse trois. Supposons, par exemple, qu'il y en ait quatre et que D soit la trace du quatrième axe. Je décompose la rotation ω en deux autres, l'une ω_4 autour de l'axe D, l'autre ω' autour d'un autre axe projeté en un point quelconque J de OD; puis je décompose la rotation ω' en trois autres autour des trois centres A, B, C. Cette dernière décomposition est unique; mais comme J peut être choisi

arbitrairement, on peut faire varier comme on l'entend les rotations partielles.

88. *Composition d'une rotation et d'une translation perpendiculaire à son axe.*

Nous continuerons toujours à raisonner sur les projections faites sur un plan perpendiculaire à l'axe.

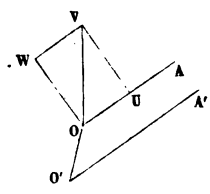
Soient Om (*fig.* 31, p. 103) la perpendiculaire abaissée d'un centre O sur la direction de la translation dont je représente la vitesse par V. Il y a une portion de cette droite à gauche ou à droite du point O, pour les points de laquelle les vitesses, respectivement dues à la rotation et à la translation, sont de sens opposés, et l'on peut trouver par suite sur cette portion un point m pour lequel la vitesse résultante sera nulle. Ce point, déterminé par la relation

$$V = \omega . Om, \quad \text{d'où} \quad Om = \frac{V}{\omega},$$

est le centre instantané de rotation. La vitesse angulaire autour du point m sera d'ailleurs ω, puisque la vitesse de translation de O, c'est-à-dire sa vitesse rotatoire autour de m, est représentée par V. On déduit de là une règle très-simple pour composer une translation et une rotation.

89. *Connaissant la vitesse* V *d'un point* O *d'un système invariable* (*fig.* 33), *la grandeur et la direction de la rotation* ω *autour de ce point, trouver la position de l'axe instantané de rotation et de glissement.*

Fig. 33.



Décomposons la vitesse V en deux autres U, W dirigées respectivement suivant l'axe de rotation OA et la perpendiculaire à cet axe située dans le plan qu'il détermine avec V. La rotation ω et la translation W se composent en une rotation autour d'un axe parallèle à OA, rencontrant la perpendiculaire en O à OA et W, en un

point O′, d'un côté ou de l'autre de leur plan, selon le sens de ω. La position de ce point est déterminée par la relation

$$\omega \times OO' = W,$$

et l'on aura finalement une rotation ω autour de O′A′ accompagnée d'une translation parallèle à cet axe.

90. *Composition des rotations autour d'axes concourants.* — Considérons un corps solide animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe mB (*fig.* 3, p. 12), tournant lui-même autour de la droite mC qui le rencontre en m. Supposons que ces deux mouvements de rotation dont nous représenterons par ω', ω les vitesses angulaires, aient lieu dans le même sens, de la droite vers la gauche, par exemple, pour l'observateur couché suivant mB, mC, en ayant les pieds en m. Chaque point p de l'angle BmC dont pj, ph sont les distances aux axes AC, AB, est animé de deux vitesses de sens contraire $\omega . pj$, $\omega' . ph$, et si $\omega . pj = \omega' . ph$, ce point restera fixe. Or, d'après le théorème de Varignon (67), tous les points de la résultante mD des longueurs mC $= \omega$, mB $= \omega'$ considérées comme des accélérations, jouissent de la propriété précédente. D'où il suit que les deux rotations simultanées ci-dessus se réduisent à une rotation unique autour de mD. Soient Ω la rotation résultante, lj, li les perpendiculaires abaissées d'un point l de mB sur mC et mD. On a, en égalant les deux expressions de la vitesse du point l,

$$\Omega . li = \omega' lj,$$

d'où il suit que Ω est représentée en grandeur par la diagonale mD.

Ainsi deux rotations simultanées et en général un nombre quelconque de rotations simultanées autour d'axes concourants se composent absolument comme des vitesses. On pourra aussi considérer une rotation comme la résultante de plusieurs autres que l'on déterminera en suivant la

marche que nous avons indiquée pour la décomposition des vitesses.

91. *Compositions de rotations autour d'axes ayant des directions quelconques.*

Soient $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ les vitesses angulaires correspondant à des rotations simultanées d'un système invariable autour d'axes A, A', A'', ... dont les directions sont d'ailleurs quelconques. Chaque rotation peut être considérée comme résultant d'une même rotation autour d'un axe parallèle passant par un point O du système choisi arbitrairement et d'une translation perpendiculaire au plan des deux axes, dont la grandeur et la direction sont déterminées. On est alors ramené à composer les rotations qui ont lieu autour d'axes passant par un même point O, ainsi que les translations. Le mouvement se réduit donc à une simple rotation accompagnée d'une translation. Il est facile dès lors, comme on l'a vu plus haut, de trouver la position de l'axe instantané de rotation et de glissement. Considérant en particulier le cas de deux rotations ω, ω', transportons-les parallèlement à elles-mêmes en un point O de la plus courte distance p de leurs axes ou de son prolongement selon le sens des rotations; pour fixer les idées, nous ferons la première hypothèse. Soient r et r' les distances du point O à ces axes, β, β' les angles formés par ω, ω' avec la rotation résultante Ω. Cette rotation sera accompagnée de translations ωr, $\omega' r'$ respectivement perpendiculaires à ω, ω' et comprises dans leur plan, et qui donnent les composantes

$$\omega r \sin\beta + \omega' r' \sin\beta', \quad \omega r \cos\beta - \omega' r' \cos\beta',$$

respectivement parallèle et perpendiculaire à Ω. En choisissant le point O de manière que

$$\frac{r}{r'} = \frac{\omega' \cos\beta'}{\omega \cos\beta},$$

il déterminera complétement la position de l'axe instantané de rotation et de glissement.

Quant au glissement, il sera exprimé par

$$\omega r \sin \beta + \omega' r' \sin \beta' = \omega \sin \beta (r + r') = \omega \sin \beta p,$$

attendu que

$$\omega \sin \beta = \omega' \sin \beta'.$$

92. *Projections de la vitesse résultant de la rotation instantanée sur trois axes rectangulaires fixes.* — On peut supposer l'origine placée en un point de l'axe instantané de rotation et de glissement.

Soient n, p, q les composantes de ω suivant Ox, Oy, Oz, dont le sens est de la gauche vers la droite pour l'observateur couché successivement suivant ces trois axes en ayant les pieds en O.

On reconnaît facilement que la rotation q donne les composantes de la vitesse $-qy$ suivant Ox, qx suivant Oy, que n donne les composantes ny, $-nz$ suivant Oz et Oy; et qu'enfin la vitesse résultant de p, estimée suivant Oz, Ox, a respectivement pour expressions $-px$, $+pz$.

Les composantes de la vitesse sont donc enfin

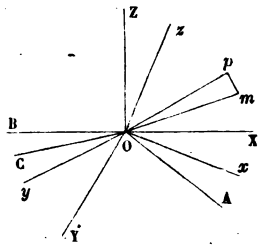
$$\begin{array}{ll} pz - qy & \text{suivant } Ox, \\ qx - nz & \quad\text{»}\quad Oy, \\ ny - px & \quad\text{»}\quad Oz. \end{array}$$

93. *Relations entre les composantes de la rotation instantanée dans le mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe, estimées suivant trois axes rectangulaires passant par ce point et faisant partie du système : et* 1° *les composantes de la même rotation estimées suivant trois axes fixes rectangulaires de même origine;* 2° *les angles qui déterminent la position des axes mobiles par rapport aux axes fixes.*

Les formules que nous allons établir sont indispensables dans l'étude du mouvement d'un corps solide.

1° Soient O le point fixe (*fig.* 34); OX, OY, OZ les trois axes rectangulaires fixes; Ox, Oy, Oz les axes mobiles; n, p, q les composantes suivant ces derniers de la rotation instantanée; ν, ϖ, χ les mêmes composantes relatives aux axes fixes; OA la trace du plan xOy sur le plan XOY; θ l'angle formé par ces plans ou par les droites OZ, Oz; φ, ψ les angles formés par OA avec OX, Ox; OB, OC les perpendiculaires en O à OA dans les plans xOy, XOY. Les angles θ, φ, ψ suffisent pour déterminer la position des axes mobiles par rapport aux axes fixes.

Fig. 34.



On reconnaît facilement que les rotations ν, ϖ sont équivalentes aux deux suivantes respectivement parallèles à OA, OC,

$$\nu \cos\varphi + \varpi \sin\varphi \;\ldots\; \text{OA},$$

$$-\nu \sin\varphi + \varpi \cos\varphi \;\ldots\; \text{OC}.$$

On remarquera que les quatre droites OB, OC, OZ, Oz sont situées dans un même plan perpendiculaire à OA, et que l'angle BOC est égal à θ. La composante ci-dessus, parallèle à OC, peut être considérée comme la résultante de ces deux autres, respectivement parallèles à Oz et OB,

$$-(-\nu \sin\varphi + \varpi \cos\varphi) \sin\theta \;\ldots\; \text{O}z,$$

$$(-\nu \sin\varphi + \varpi \cos\varphi) \cos\theta \;\ldots\; \text{OB}.$$

La rotation χ donne les composantes

$$\chi \cos\theta \quad \text{suivant O}z$$

$$\chi \sin\theta \quad \text{»} \quad \text{OB}.$$

Enfin, on voit immédiatement que les composantes suivant OA et OB sont équivalentes aux suivantes, estimées parallè-

lement à Ox, Oy :

$$(\nu\cos\varphi+\varpi\sin\varphi)\cos\psi-\left\{(-\nu\sin\varphi+\varpi\cos\varphi)\cos\theta+\chi\sin\theta\right\}\sin\psi,$$
$$(\nu\cos\varphi+\varpi\sin\varphi)\sin\psi+\left\{(-\nu\sin\varphi+\varpi\cos\varphi)\cos\theta+\chi\sin\theta\right\}\cos\psi.$$

En exprimant que les composantes suivant Ox, Oy, Oz sont respectivement égales à n, p, q, il vient

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned} n &= \nu(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\cos\theta)\\ &\quad+\varpi(\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta)-\chi\sin\theta\sin\psi,\\ p &= \nu(\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi\cos\theta)\\ &\quad+\varpi(\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta)+\chi\sin\theta\cos\psi,\\ q &= \nu\sin\varphi\sin\theta-\varpi\cos\varphi\sin\theta+\chi\cos\theta. \end{aligned}\right.$$

2° Le déplacement des axes Ox, Oy, Oz, par rapport à OX, OY, OZ peut être considérée comme s'effectuant en vertu des rotations $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$ autour de OA, OZ, Oz, de la gauche vers la droite pour l'observateur couché successivement suivant ces trois directions en ayant les pieds en O.

La rotation $\frac{d\varphi}{dt}$ peut être considérée comme la résultante des deux suivantes :

$$\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta \qquad \text{parallèle à OB},$$
$$\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta \qquad \text{» à } Oz,$$

et il vient, en appelant r, s les composantes de la rotation suivant OA, OB,

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned} r &= \frac{d\theta}{dt},\\ s &= \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta,\\ q &= -\frac{d\psi}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta, \end{aligned}\right.$$

et enfin

$$(3)\quad \begin{cases} n = r\cos\psi - s\sin\psi = \dfrac{d\theta}{dt}\cos\psi - \dfrac{d\varphi}{dt}\sin\theta\sin\psi, \\ p = r\sin\psi + s\cos\psi = \dfrac{d\theta}{dt}\sin\psi + \dfrac{d\varphi}{dt}\sin\theta\cos\psi, \\ q = -\dfrac{d\psi}{dt} + \dfrac{d\varphi}{dt}\cos\theta. \end{cases}$$

§ V. — De l'Accélération angulaire.

94. *De l'accélération angulaire.* — Dans le mouvement le plus général d'un corps solide (82), l'axe instantané de rotation et de glissement, ou tout autre passant par un point quelconque entraîné dans le mouvement du corps, change à chaque instant de position et sa vitesse angulaire varie en grandeur. Soient OA, OA′ deux parallèles, menées par un même point O à deux positions consécutives de cet axe; ω, $\omega + d\omega$ les vitesses angulaires correspondantes; prenant $OA = \omega$, $OA' = \omega + d\omega$, la rotation autour de OA′ pourra être considérée comme la résultante de la rotation ω autour de OA et d'une rotation égale à AA′ autour d'une parallèle à cette dernière droite. Cet accroissement géométrique, relatif au temps dt, de la rotation ω, est ce que l'on appelle l'*accélération angulaire élémentaire* du système à l'instant considéré; l'*accélération angulaire finie* est représentée par la même longueur AA′ rapportée à l'unité de temps ou par $\alpha = \frac{AA'}{dt}$.

On reconnaîtra, en se reportant aux n°s 43 et 51, que les accélérations angulaires simultanées se composent comme les accélérations linéaires, et que le déplacement angulaire correspondant relatif à l'élément de temps dt est égal à la moitié du produit de l'accélération angulaire par le carré de cet élément, ou à $\frac{1}{2}\alpha\, dt^2$.

L'accélération angulaire totale $\frac{AA'}{dt}$ peut être considérée comme la résultante de l'*accélération angulaire estimée suivant l'axe instantané*, $\frac{d\omega}{dt}$, et de l'accélération normale à cet axe, $\omega \frac{d\varepsilon}{dt}$, $d\varepsilon$ étant l'angle formé par deux positions consécutives du même axe.

Si l'axe instantané de rotation reste parallèle à lui-même, l'accélération angulaire se réduit à l'accélération $\frac{d\omega}{dt}$ suivant sa direction.

On peut décomposer l'accélération angulaire en trois autres suivant trois axes rectangulaires fixes, et (30 et 36) chaque composante est la dérivée, par rapport au temps, de la composante correspondante de la rotation instantanée.

95. *Projections de l'accélération due à l'accélération angulaire sur trois axes rectangulaires fixes.* — On peut supposer l'origine placée en un point de la direction de l'accélération angulaire.

En se reportant aux notations du n° 92, les trois composantes de l'accélération angulaire suivant Ox, Oy, Oz, sont $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, et l'on reconnaît de la même manière que les composantes cherchées sont

$$z\frac{dp}{dt} - y\frac{dq}{dt} \quad \text{suivant } Ox,$$

$$x\frac{dq}{dt} - z\frac{dn}{dt} \quad \text{suivant } Oy,$$

$$y\frac{dn}{dt} - x\frac{dp}{dt} \quad \text{suivant } Oz.$$

96. *La composante de l'accélération angulaire suivant*

un axe entraîné dans le mouvement du système invariable est la dérivée par rapport au temps de la même composante de la rotation instantanée,

Soient OB la droite qui représente en grandeur et en direction la rotation instantanée; OA, OA′ les projections de OB sur les deux positions consécutives correspondantes de l'axe mobile. L'angle BOA étant égal à BOA′, il s'ensuit que OA′ = OA.

Si donc p est la projection de ω sur la droite OA ou sur OA′, $p + dp$ celle de $\omega + d\omega$ sur OA′, la composante de l'accélération angulaire suivant OA′ ou OA est $\frac{dp}{dt}$, ce qui est conforme à l'énoncé.

97. *Relations entre les composantes de l'accélération angulaire dans le mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe, estimées suivant trois axes rectangulaires passant par ce point et faisant partie du système, et les composantes de la même rotation estimées suivant trois axes fixes rectangulaires ayant la même origine.*

En se reportant aux notations du n° 93, et en opérant de la même manière, on a, d'après le numéro précédent:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d\nu}{dt}(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\theta)$$
$$+ \frac{d\varpi}{dt}(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) - \frac{d\chi}{dt}\sin\theta\sin\psi,$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d\nu}{dt}(\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta)$$
$$+ \frac{d\varpi}{dt}(\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) + \frac{d\chi}{dt}\sin\theta\cos\psi,$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\nu}{dt}\sin\varphi\sin\theta - \frac{d\varpi}{dt}\cos\varphi\sin\theta + \frac{d\chi}{dt}\cos\theta.$$

§ VI. — Applications de la Composition des Rotations.

98. Les applications de la composition des rotations et des translations sont très-nombreuses; nous aurons souvent l'occasion d'apprécier l'utilité de cette partie de la Cinématique. C'est pourquoi nous nous bornerons ici à traiter deux questions qui se rattachent directement à la théorie que nous venons d'exposer.

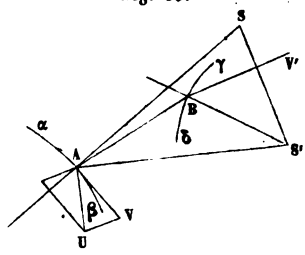
Dans certaines machines oscillantes des bateaux à vapeur, la distribution s'opère à l'aide de deux tiroirs adaptés latéralement au cylindre. La tige de chaque tiroir s'articule à l'extrémité d'un levier oblique par rapport à la direction du mouvement du cylindre. Ce levier tourne autour d'un axe fixé au cylindre et parallèle à la direction de l'arbre moteur; l'autre extrémité de ce levier s'engage dans une coulisse circulaire dont la concavité est tournée vers le bas, et dont le plan est perpendiculaire à l'arbre moteur qui lui imprime, à l'aide d'un excentrique, un mouvement vertical alternatif.

Si l'on examine le mouvement du levier en projection sur le plan de la coulisse, on reconnaît que l'un de ses points, celui où il est traversé par son axe, est animé du mouvement du cylindre; que son extrémité engagée dans la coulisse participe au mouvement connu de cet organe et possède, en outre, suivant la coulisse, une vitesse relative de direction déterminée, dont on peut se proposer de trouver la grandeur, ainsi que celle de la vitesse relative du tiroir, etc.; on est conduit ainsi à se poser le problème suivant :

Trouver le centre instantané de rotation d'une figure invariable dont un point décrit d'un mouvement connu une courbe fixe, et dont un autre point est assujetti à glisser sur une autre courbe qui se déplace suivant une loi donnée. — Soient $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ (*fig.* 35) la courbe fixe et la

courbe mobile; A, B les deux points du système qui les décrivent; V la vitesse donnée du point A; V′ la vitesse supposée connue du point de $\gamma\delta$ qui coïncide actuellement avec le point B; w la vitesse relative inconnue de B suivant $\gamma\delta$; la vitesse absolue de B est la résultante de V′ et w. Le centre instantané cherché se trouve sur la normale au point A de $\alpha\beta$; pour achever de le déterminer, concevons que l'on imprime à tout le système une vitesse égale et contraire à V′; la vitesse U du point A sera la résultante de V et V′; le point B ne possédera plus que la vitesse relative w, et le centre instantané S′ se trouvera au point de rencontre de la normale en B à $\gamma\delta$ et de la perpendiculaire en A à la vitesse U; enfin la vitesse angulaire autour de S′ sera

Fig. 35.



$$\frac{U}{S'A},$$

d'où

$$w = \frac{U}{S'A}\,BS'.$$

Pour avoir la position du véritable centre instantané, il faut concevoir que l'on imprime à tout le système une translation représentée par la vitesse V′. Ce centre étant situé sur la perpendiculaire abaissée du point S′ sur la direction de V′, se trouve par suite à l'intersection S de cette droite avec la normale en A à $\alpha\beta$.

En revenant à la machine oscillante, la vitesse relative angulaire de AB autour du point A, par rapport au cylindre, laquelle donne la loi du mouvement relatif du tiroir, est évidemment ω, puisque A devient le centre instantané en imprimant à tout le système une vitesse translatoire égale et contraire à V, qui n'altère en aucune façon la rotation instantanée.

99. *Du glissement aux points de jonction des systèmes articulés.* — Soient AB, BC deux pièces articulées mobiles dans leur plan, faisant partie d'un système quelconque; B le centre de l'articulation; S, S′ les centres instantanés de ces deux pièces, situés sur la normale à l'élément décrit par le point B; ω, ω' les vitesses angulaires correspondantes.

Concevons que l'on imprime à tout le système une rotation égale et contraire à celle de AB; le point B deviendra le centre instantané, et la vitesse angulaire correspondante sera $\omega - \omega'$ ou $\omega + \omega'$, selon que les centres S, S′ se trouveront d'un même côté du point B ou de part et d'autre de ce point. Si ρ est le rayon du tourillon qui forme l'articulation en ce point, le glissement élémentaire sera $\rho(\omega \mp \omega')\,dt$ et le glissement total pour un certain déplacement fini,

$$\rho \int (\omega \mp \omega')\,dt,$$

se déterminera, si l'on veut, par une quadrature.

Prenons pour exemple l'articulation du système de bielle et manivelle du n° 81 (*fig.* 24, p. 86). La vitesse angulaire instantanée de la bielle autour de S étant

$$\omega' = \omega \frac{OA}{SA} = \omega \frac{AK}{AB},$$

on a pour le glissement élémentaire,

$$\rho(\omega - \omega')\,dt = \rho\left(1 - \frac{AK}{AB}\right)\omega\,dt = \rho\left(1 - \frac{AK}{AB}\right)d\alpha,$$

et comme $AK = OA\,\dfrac{\cos\alpha}{\cos ABO} = \dfrac{r\cos\alpha}{\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{l^2}\sin^2\alpha}}$, il vient

$$\rho\left(1 - \frac{r\cos\alpha}{l\sqrt{1 - \dfrac{r^2}{l^2}\sin^2\alpha}}\right)d\alpha.$$

Si l'on néglige le carré de $\frac{r}{l}$, on a

$$\rho\left(1-\frac{r}{l}\cos\alpha\right)d\alpha,$$

et pour le glissement relatif au parcours de l'angle α

$$\rho\left(\alpha-\frac{r}{l}\sin\alpha\right).$$

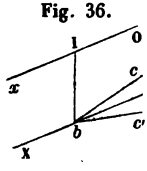
On trouverait, par le même procédé, le glissement des articulations du parallélogramme de Watt, etc.

§ VII. — Du Roulement et du Glissement des Corps solides.

100. L'étude du mouvement relatif de deux corps solides mobiles (S) et (S′) dont les surfaces sont assujetties à rester constamment en contact par un ou plusieurs points, se ramène immédiatement au cas où l'un des deux corps est fixe. Il suffit en effet de concevoir que l'on imprime à leur ensemble une rotation et une translation précisément égales et contraires à celles qui constituent le mouvement de l'un d'eux, (S′) par exemple, qui se trouve ainsi ramené au repos.

La composition des rotations et des translations permettra facilement de trouver la position Ox de l'axe instantané de rotation et de glissement de (S) dans son mouvement résultant, ainsi que la rotation ω et le glissement u qui lui correspondent.

Fig. 36.



Soient à un instant donné (*fig.* 36), b l'un des points de contact des deux surfaces; $r = b\mathrm{I}$ la perpendiculaire abaissée de ce point sur la direction de Ox. La rotation ω peut être considérée comme la résultante d'une rotation égale autour d'un axe bX parallèle à Ox

passant par le point b, et d'une translation ωr perpendiculaire au plan XbI dont on obtient facilement le sens, et *il faut et il suffit pour que les surfaces* (S) *et* (S′) *se touchent au bout du temps* dt *en un point de* (S′) *infiniment voisin de* b, *que la résultante* U *des translations* u *et* ωr *soit située dans le plan tangent commun en* b.

Dans le cas où la rotation instantanée autour de Ox n'est pas accompagnée d'un glissement le long de cet axe, la translation U se réduit à ωr, et alors la normale commune aux deux surfaces en chaque point de contact rencontre l'axe instantané.

101. *Du mouvement de glissement.* — Si la rotation ω est constamment nulle, le corps (S) est animé d'un mouvement de translation, et les plans tangents aux surfaces, menés aux différents points où elles se touchent au même instant, doivent nécessairement être parallèles à la direction de la vitesse $u = U$ dans ce mouvement.

L'élément de la surface (S) correspondant à chaque point de contact viendra successivement coïncider avec des éléments distincts et consécutifs de la surface de (S′), et le corps (S) *glisse* sur (S′), ou il est animé d'un *mouvement de glissement* par rapport à ce dernier corps.

Le *glissement élémentaire* sera représenté par Udt, et le *glissement total* correspondant à l'intervalle compris entre les temps écoulés t_0, t, par $\int_{t_0}^{t} Udt$.

Si la rotation ω n'est nulle qu'à un instant déterminé, le mouvement de (S) se réduit, pour cet instant, à un glissement élémentaire sur (S′).

102. *Du mouvement de roulement.* — Lorsque la rotation ω n'est pas nulle, la translation U a en général des valeurs différentes pour tous les points de contact. Admettons que, pour les positions successives de l'un b de ces

points (*fig.* 36, p. 119) la translation U soit constamment nulle, ce qui exige que $u = 0$ et que Ox coïncide avec bX, car les composantes u et ωr de U sont rectangulaires.

Soient c' le point de (S′) où a lieu le contact au bout du temps dt, c le point correspondant de (S), le chemin cc' décrit par c pour aller de c en c' est un arc de cercle perpendiculaire à bX et dont le centre est situé sur cet axe.

Les plans tangents suivant bc, bc' ou les éléments superficiels distincts correspondants, succédant, sur les deux surfaces, au plan tangent ou à l'élement superficiel commun en b, viennent ainsi se mettre en contact, sans glissement, au bout du temps dt; en d'autres termes, les éléments consécutifs de la première surface viennent successivement se mettre en contact avec des éléments consécutifs de la seconde. Le corps (S) *roule* ainsi sur (S′) ou est animé d'un *mouvement de roulement* par rapport à ce dernier pour les points de contact qui se succèdent d'une manière continue à partir du point b. Les points de contact successifs pour lesquels il y a roulement déterminent sur les deux surfaces deux courbes roulant l'une sur l'autre, et qui seront pour nous deux *courbes de roulement correspondantes tracées respectivement sur les surfaces* (S) *et* (S′).

Si, pour le point b, U n'est nulle qu'à un instant déterminé, le mouvement de (S) se réduit, relativement à ce point, à un *mouvement de roulement élémentaire* pendant le temps dt, et les plans *normaux aux trajectoires décrites par les différents points du corps* (S), *correspondant au même instant, passent tous par l'axe instantané de rotation* bX.

On remarquera que, pour qu'il y ait roulement, il faudra en général que la direction de bX ne soit pas normale aux surfaces; car autrement (S) tournerait autour de cette normale, et le point de contact ne se déplacerait point. Un seul cas d'exception peut se présenter : c'est lorsque les deux surfaces étant à courbures opposées, le plan tangent

les coupe suivant des courbes tangentes l'une à l'autre; c'est ce que nous examinerons plus tard.

103. *Du mouvement le plus général d'un corps solide dont la surface reste constamment en contact par un ou plusieurs points avec la surface d'un autre corps.* — Dans le cas général où la rotation ω autour de bX, ainsi que la translation U, ne sont pas nulles, on peut supposer que les deux mouvements correspondants s'exécutent successivement indépendamment l'un de l'autre. D'où il suit que le mouvement de (S), en chacun de ses points de contact avec (S′), se composera généralement d'un mouvement de glissement mesuré dans le temps dt par le produit Udt, accompagné d'un mouvement de roulement dont la nature est complétement définie par la grandeur, le sens et la direction de l'axe de la rotation instantanée ω.

La vitesse, et par conséquent le déplacement élémentaire du point de contact, se déterminera en composant la vitesse de glissement avec la vitesse du point de contact obtenue en considérant isolément le roulement, vitesse que nous apprendrons plus tard à déterminer.

Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, la translation U, qui mesure le glissement, sera en général différente d'un point de contact b à un autre point de contact contemporain b_1; et l'on voit facilement que *le glissement ne sera le même pour les points b et b_1 qu'autant qu'ils seront situés sur une même parallèle bX à l'axe instantané de rotation et de glissement.*

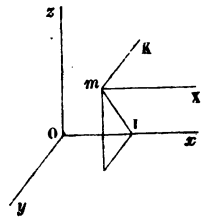
On déduit de là que *deux surfaces ne peuvent rouler l'une sur l'autre suivant plusieurs points de contact qu'autant que ces points sont situés sur l'axe instantané de rotation et que la rotation instantanée n'est pas accompagnée d'une translation parallèle à son axe.*

104. *Détermination de l'enveloppe d'une surface mobile.* — Supposons que l'on veuille déterminer l'enveloppe

des positions de la surface d'un corps mobile (S), c'est-à-dire la surface ou les surfaces auxquelles la première reste constamment tangente dans ses positions successives.

Soient, à un instant donné (*fig.* 37), Ox, l'axe instantané de rotation et de glissement de (S); ω, u, la vitesse angulaire et le glissement correspondants; Oy, Oz, deux droites rectangulaires passant par un point O de Ox et comprises dans un plan perpendiculaire à cet axe; x, y, z, les coordonnées d'un point m de la surface du corps;

Fig. 37.



$$z = f(x, y), \tag{1}$$

l'équation de la surface rapportée aux axes Ox, Oy, Oz; p, q, les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$; $m\mathrm{I} = r$, la perpendiculaire abaissée du point m sur Ox.

Nous admettrons, pour fixer les idées, que la rotation ω a lieu de la gauche vers la droite pour l'observateur couché suivant Ox en ayant les pieds en O, et nous considérerons la vitesse u comme positive ou négative, selon que le mouvement aura lieu de O vers x ou dans le sens opposé.

La rotation ω, transportée parallèlement à elle-même en mX, donne la translation ωr, perpendiculaire au plan $m\mathrm{I}x$ et dont les composantes suivant Oz et Ox sont respectivement $+\omega y$ et $-\omega z$. Pour que le point m appartienne à la surface et à son enveloppe, il faut que la somme des projections de ces composantes et de u sur la normale soit nulle, c'est-à-dire que

$$\frac{\omega y}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \frac{\omega q z}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{upz}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0,$$

ou que

$$y - qz + \frac{u}{\omega} p = 0. \tag{2}$$

Cette équation, jointe à l'équation (1), déterminera la courbe ou les courbes suivant lesquelles (S) touchera son enveloppe à l'instant considéré.

Le lieu géométrique de chacune de ces courbes sera une surface à laquelle (S) sera constamment tangente, et l'enveloppe se composera ainsi d'autant de surfaces que les équations (1) et (2) détermineront de courbes dont quelques-unes pourront devenir imaginaires pour certaines positions de (S).

Il peut se faire que (S) pénètre quelques-unes des surfaces de l'enveloppe en des points différents des points de contact; mais nous n'aurons à nous préoccuper de cette particularité que lorsque nous songerons à matérialiser ces surfaces ou à construire les corps qu'elles doivent limiter.

Dans le cas où le mouvement de (S) se réduit à une rotation sans glissement le long de l'axe instantané, les plans menés par les différents points de chaque courbe de contact et par l'axe Ox sont normaux à la surface. On peut alors construire les courbes de contact par points ainsi qu'il suit. Concevons à cet effet que l'on mène un plan passant par Ox; les points de la courbe obtenue, pour lesquels les sections de la surface perpendiculaires à Ox auront leurs tangentes normales au plan ci-dessus, seront des points communs à cette surface et à son enveloppe.

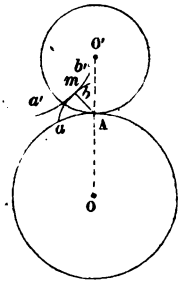
Il est maintenant facile de concevoir *comment un corps en mouvement peut en toucher constamment un autre, également mobile, par plusieurs points; il faut, pour qu'il en soit ainsi, que la surface du second corps soit tangente suivant le même nombre de lignes à l'enveloppe des positions de la première surface.*

105. *Application au tracé des engrenages.*

1° *Engrenages cylindriques.* — Proposons-nous de chercher la condition à laquelle doivent satisfaire deux courbes, ab, $a'b'$ (*fig.* 38), faisant partie de deux figures planes (S), (S'), respectivement mobiles autour des points

O, O′ de leur plan commun, pour que, par leur contact, la rotation ω autour du point O détermine autour de O′ une rotation ω' qui conserve avec la précédente un rapport constant.

Fig. 38.



Supposons en premier lieu que les rotations ω, ω' soient de sens contraire; en imprimant à l'ensemble des deux figures une rotation égale et contraire à ω, (S) restera au repos; la rotation de (S′) deviendra $\omega + \omega'$.

Le centre instantané correspondant, A, divisera OO′ en deux segments, $OA = R$, $O'A = R'$, donnés par la proportion $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R}$; il suit de là (75) que ab est l'enveloppe des positions que prend la courbe $a'b'$, en supposant qu'elle soit entraînée avec le cercle de rayon R′ et de centre O′ qui roulerait sur le cercle de centre O et de rayon R.

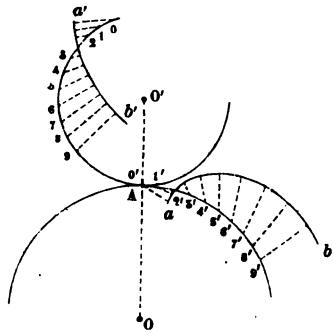
Transportant au point de contact m des deux courbes la rotation $\omega + \omega'$, il en résulte une translation $(\omega + \omega')Am$ nécessairement tangente à ces deux courbes et qui donne la mesure de leur glissement. Donc *la normale au point de contact des deux courbes passe par le point de contact des circonférences* O *et* O′.

On déduit de là une règle pratique très-simple due à M. Poncelet (Leçons à l'École d'application de l'Artillerie et du Génie, 1827-1830) pour construire rapidement la courbe ab lorsque l'on se donne la forme de $a'b'$.

Portons, à cet effet, sur la circonférence O′ (*fig.* 39) des longueurs successives équidistantes limitées par les points de division n°s 0, 1, 2, 3,..., desquels nous abaisserons des normales sur $a'b'$. Des points de division successifs n°s 0′, 1′, 2′,..., tracés sur la circonférence O, comprenant entre eux des arcs égaux aux précédents, nous décrivons des arcs de cercle avec les normales à $a'b'$ correspondant aux n°s 1,

2,..., prises pour rayons. La courbe ab s'obtiendra en traçant une ligne tangente à ces arcs de cercle, et le tracé sera d'autant plus exact que la distance des points de division des circonférences O, O′ sera plus petite par rapport à leurs rayons.

Fig. 39.



On reconnaît sans peine que le contact a lieu entre la partie de l'une des courbes intérieure à sa circonférence et la partie de l'autre courbe extérieure à la sienne.

Ces considérations théoriques servent de base au tracé des *engrenages cylindriques* ayant pour objet d'effectuer la transformation des deux rotations autour d'axes parallèles, et pour l'étude desquels nous renverrons aux Traités spéciaux de Mécanique appliquée. Nous nous bornerons à dire que les circonférences OA, O′A sont appelées *circonférences primitives* et correspondent aux *cylindres primitifs de l'engrenage*. Cette dénomination vient de ce que, si le simple contact suffisait, ces deux cylindres pourraient opérer la transmission, sans qu'il fût nécessaire de les munir des dents ab, $a'b'$,...

Soient p la normale Am (*fig.* 38, p. 125), ds l'arc de chacune des circonférences O, O′, décrit dans le temps dt, on a

$$\omega\, dt = \frac{ds}{R}, \quad \omega'\, dt = \frac{ds}{R'},$$

et le glissement élémentaire prend la forme

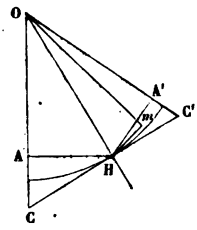
$$(\omega + \omega')\, p\, dt = p\, ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Si les rotations ω, ω' doivent être de même sens, l'une

des circonférences O, O′ est intérieure à l'autre, ce qui correspond à un *engrenage intérieur*, pour lequel le tracé est le même que le précédent. Le glissement s'obtient en affectant du signe —, dans l'expression ci-dessus, l'inverse du plus grand rayon.

2° *Des engrenages coniques.* — Supposons que deux surfaces coniques (S), (S′), de même sommet O (*fig.* 40), soient assujetties à rester en contact en tournant respectivement autour des axes OA, OA′, passant par leur sommet commun, et cherchons la condition à laquelle elles doivent satisfaire pour que la rotation ω de (S) donne lieu à une rotation autour de OA′ qui soit avec la précédente dans un rapport constant.

Fig. 40.



Supposons que OA, OA′ soient les portions des axes pour lesquelles ω, ω′ soient de sens contraire pour l'observateur placé successivement suivant leur direction en ayant les pieds en O.

En imprimant à l'ensemble de (S) et (S′) une rotation égale et contraire à ω′, (S′) sera ramené au repos et (S) tournera autour d'un axe instantané OH avec la vitesse angulaire Ω résultant de la composition de ω et — ω′.

Il est clair dès lors que (S) sera l'enveloppe des positions que prendra la surface (S′), entraînée dans le mouvement de roulement l'un sur l'autre des cônes circulaires ayant pour axes respectifs OA′, OA, et pour génératrice OH.

Appelant ε l'angle formé par la génératrice O*m* commune à (S) et (S′), la rotation Ω se décompose en deux autres : l'une Ω cos ε suivant O*m*, l'autre Ω sin ε, perpendiculaire à cette direction à laquelle sera dû le glissement de (S′) sur (S), ce qui exige que le plan OH*m* soit normal aux deux surfaces.

Cela posé, si nous concevons une sphère de centre O

et d'un rayon arbitraire $OH = l$, elle déterminera dans les cônes deux cercles roulant l'un sur l'autre, de rayons HA', HA, et dans les surfaces (S) et (S') deux courbes (s), (s'), assujetties à se toucher constamment, et dont la connaissance suffit pour définir complétement ces surfaces.

On reconnaîtra facilement que l'arc de grand cercle perpendiculaire au point de tangence m de (s), (s') passera par le point de contact H des circonférences HA, HA', et qui est le pôle instantané de rotation de (s'). D'où il suit que le tracé de (s) se déduira de la forme de (s') en appliquant sur la sphère la méthode indiquée plus haut pour les engrenages cylindriques.

Le glissement élémentaire au point m, exprimé par $\Omega \sin \varepsilon . l . dt$, se met généralement sous une autre forme. Soient à cet effet R, R', les portions HC, HC' de la perpendiculaire en H à OH limitées par OC, OC'; ds, le chemin élémentaire décrit dans le temps dt par un point des circonférences AH, A'H; α, α', les angles formés par OA, OA' avec OH; on a

$$\omega dt = \frac{ds}{R}, \quad \omega' dt = \frac{ds}{R'}, \quad \Omega = \omega \cos \alpha + \omega' \cos \alpha',$$

et par suite

$$\Omega \sin \varepsilon \, l dt = l \sin \varepsilon \left(\frac{\cos \alpha}{R} + \frac{\cos \alpha'}{R'} \right) ds.$$

Si l'on remarque que $l \sin \varepsilon$ est égal à la perpendiculaire abaissée du point H sur Om, et si l'on suppose $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$, on retombe sur l'expression du glissement trouvée plus haut pour les engrenages cylindriques.

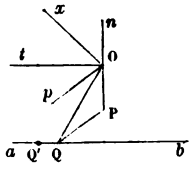
Si le contact de (S) et (S') ou de (s) et (s') ne doit s'étendre qu'à une très-faible distance de part et d'autre de OH, on peut substituer à la sphère la considération des deux cônes circulaires ayant OA, OA' pour axes et pour génératrice CC', comme l'a proposé M. Poncelet dans ses

Leçons de 1825 à l'Ecole d'Application de Metz, on reconnaît alors sans peine que, si l'on développe ces deux cônes dans un plan, les secteurs obtenus se mouvront autour de C et C′ comme les circonférences d'un engrenage cylindrique, et l'on est ainsi ramené au tracé relatif à cet engrenage pour obtenir le développement de (s) connaissant celui de (s').

Les considérations précédentes sont spécialement applicables à la transmission de mouvements de rotation autour d'axes concourants, connue sous le nom d'*engrenages coniques*, dont l'étude technique sortirait des limites que nous nous sommes imposées. Nous ferons seulement remarquer que les cônes ayant pour axes OA, OA′ sont appelés les *cônes primitifs* de l'engrenage, et que les surfaces (S), (S′) déterminent les saillies ou *dents* des roues formées par les cônes ci-dessus.

106. *Conditions nécessaires pour que l'enveloppe des positions d'une surface développable se raccorde à chaque instant avec cette surface.* — Soient à un instant quelconque (*fig.* 41) Ox l'axe instantané de rotation et de glissement de la surface; ab la génératrice de contact entre cette surface et son enveloppe; OP $= h$, PQ les perpendiculaires abaissées respectivement du point O de Ox sur le plan tangent commun aux surfaces suivant ab, et du point P sur cette génératrice; Ot la parallèle à la direction de ab menée par le point O; Op la perpendiculaire au plan tOP, menée au même point O; On le prolongement de OP au-dessus du plan tOp; ω_t, ω_n, ω_p les composantes suivant Ot, On, Op de la rotation ω, supposées positives ou négatives selon qu'elles ont lieu de la gauche vers la droite ou inversement pour l'observateur couché suivant ces droites en ayant les pieds en O; u_t, u_n, u_p, les composantes,

Fig. 41.



parallèles aux mêmes droites, de la vitesse de translation u de la surface suivant Ox, considérées comme positives ou négatives, suivant les conventions ordinaires.

Les rotations ω_n, ω_p transportées parallèlement à elles-mêmes en Q donnent des translations situées, de même que u_p et u_t, dans le plan tangent commun aux deux surfaces suivant ab.

La rotation ω_t, transportée de la même manière en Q, fournit une translation $\omega_t . OQ$ perpendiculaire au plan tOQ, et dont les composantes suivant Op et On sont respectivement $-\omega_t OP$, $-\omega_t PQ$.

Pour satisfaire à la condition énoncée, il faut exprimer que la translation du point Q est située dans le plan tangent Pab, ou que

$$u_n = \omega_t . PQ,$$

d'où

$$PQ = \frac{u_n}{\omega_t};$$

ainsi la distance PQ est indépendante de la position du point O sur l'axe instantané. Donc

Pour qu'une surface développable se raccorde constamment avec son enveloppe, il faut que son axe instantané de rotation et de glissement soit situé dans un plan parallèle au plan normal mené suivant la génératrice de contact, et que la distance entre ces deux plans soit égale au rapport de la vitesse de glissement à la rotation, estimées respectivement suivant la normale et la génératrice ci-dessus.

S'il en est ainsi, on a

$$\omega_p = 0, \quad u_p = 0;$$

le glissement au point Q est la résultante w des translations $\omega_t . OP = \omega_t h$ et u_t dirigées respectivement de Q vers P, et suivant la génératrice de contact.

Le glissement en un autre point Q′ de ab sera la résul-

tante de w et de la vitesse ω_n. QQ′ obtenue en transportant ω_n parallèlement à elle-même de Q en Q′.

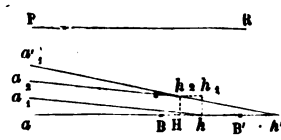
On peut donc dire que : *Le glissement suivant la génératrice de contact résulte d'une translation w comprise dans le plan tangent, et d'une rotation autour d'une normale en un point déterminé* Q *de cette arête,* ou encore, *d'une rotation autour d'une perpendiculaire au plan tangent,* laquelle est la résultante de w et de la rotation ci-dessus.

Enfin le roulement aura lieu autour de ab en vertu de de ω_t.

107. *Conditions auxquelles doit satisfaire le mouvement d'une surface développable donnée pour qu'elle se raccorde constamment avec une surface développable également donnée et supposée fixe.*

Soient (*fig.* 42) aB la génératrice de contact des surfaces; B, B′ les points des arêtes de rebroussement de la surface mobile (S) et de la surface fixe (S′), situés sur cette droite; PR la projection parallèle à aB (104 et 106), sur le plan tangent suivant cette droite, de l'axe instantané de rotation et de glissement de (S); d la distance de PR à aB; a_1 h, a'_1 h' les génératrices de (S) et (S′) qui viennent coïncider au bout du temps dt, touchant en h et h' les arêtes de rebroussement correspondantes. Conservons d'ailleurs les notations du numéro précédent, en supposant que l'on transporte la rotation parallèlement à elle-même en B. On a d'abord

Fig. 42.



$$(1) \qquad d = \frac{u_n}{\omega_t}.$$

Si l'on néglige les quantités du second ordre, le point h de aB se déplacera, dans le temps dt, de h au point h_2 situé sur $a'_1 h'$, en vertu de la translation perpendiculaire à aB,

$\omega_t h$ qui le transporte de h en h_1 et de la translation u_t qui lui fera décrire l'élément $h_1 h_2 = u_t dt$.

Soient $d\alpha$, $d\alpha'$ les angles de contingence $a_1 ha$, $a'_1 h' a$, des arêtes de rebroussement de (S) et (S′) en h, h'; ds, ds' les éléments Bh, B′h'; ρ, ρ' les rayons de courbure, τ, τ' les rayons de seconde courbure ou de *cambrure* (*) de ces arêtes aux mêmes points h, h'; a la distance donnée BB′; H la projection de h_2 sur aB. Le triangle h_2Hh' donne

$$\overline{h_2\mathrm{H}} = \overline{\mathrm{H}h'}.d\alpha';$$

et comme Hh' = BB′, à un infiniment petit près, on a

$$(2) \qquad \omega_t . h = a . \frac{d\alpha'}{dt}.$$

La rotation ω_n ayant pour effet d'amener en $a'_1 h'$ la parallèle $a_2 h_2$ à $a_1 h$, il vient

$$(3) \qquad \omega_n dt = d\alpha' - d\alpha.$$

La rotation ω_t autour de aB ou de $a'_1 h'$, en négligeant les termes du second ordre, ayant lieu de la gauche vers la droite pour l'observateur couché suivant l'une ou l'autre de ces directions en ayant les pieds en h', l'élément en contact de (S) ne peut se détacher de l'élément correspondant de (S′) qu'autant qu'aux environs de aB la surface (S) est située par rapport à l'axe instantané au-dessous du plan tangent et que (S′) ne lui est pas intérieure. L'inverse aurait lieu si, ω_t conservant le même sens ou le même signe, h prenait un signe contraire. Il sera facile de déterminer dans chaque cas particulier les conditions relatives au signe de h par rapport à celui de ω_t.

Soient $d\chi$, $d\chi'$ les angles formés par le plan tangent suivant aB, avec les plans tangents à (S), (S′) menés suivant

(*) Expression due à M. de Saint-Venant. (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXe cahier.)

$a_1 h$, $a'_1 h'$; on a, selon que ces surfaces s'opposent ou non leurs convexités,

$$(4) \qquad d\chi \pm d\chi' = \omega_t\, dt.$$

En éliminant dt à l'aide de l'équation (2), les formules (3) et (4) deviennent

$$(5) \qquad d\alpha = d\alpha' \left(1 - \frac{a}{h} \cdot \frac{\omega_n}{\omega_t}\right),$$

$$(6) \qquad d\chi \pm d\chi' = \frac{a}{h}\, d\alpha',$$

ou

$$(5') \qquad \frac{1}{\rho}\, ds = \left(1 - \frac{a}{h}\frac{\omega_n}{\omega_t}\right) \frac{ds'}{\rho'},$$

$$(6') \qquad \frac{1}{\tau}\, ds \pm \frac{1}{\tau'}\, ds' = \frac{a}{h}\frac{ds'}{\rho'},$$

et en éliminant $\frac{ds}{ds'}$ entre ces deux relations

$$(7) \qquad \frac{\omega_n}{\omega_t} = \frac{h}{a} + \frac{\tau}{\rho}\left(\pm \frac{h\rho'}{a\tau'} - 1\right).$$

Ce rapport déterminera l'inclinaison de l'axe instantané sur le plan tangent, lorsque les deux surfaces étant données de position, h sera connu en grandeur et en direction. Le sens de ω_t sera défini par la manière dont les courbures de (S) et (S') seront disposées l'une par rapport à l'autre, mais sa grandeur pourra être choisie arbitrairement. La vitesse u_t sera donnée par l'équation suivante, qui se déduit des équations (1) et (7) :

$$(8) \qquad d = \frac{u_n}{\omega_t} = \frac{u_n}{\omega_n} \cdot \frac{\omega_n}{\omega_t} = \frac{u_t}{\omega_t} \cdot \frac{\omega_n}{\omega_t} = \frac{u_t}{\omega_t}\left[\frac{h}{a} + \frac{\tau}{\rho}\left(-1 \pm \frac{h\rho'}{a\tau'}\right)\right].$$

Si $h = 0$, la formule (2) donne $a = 0$ et les deux arêtes de

rebroussement doivent être tangentes en B. Les équations (3) et (4) donnent alors

$$(8') \qquad \frac{d\alpha' - d\alpha}{d\chi \pm d\chi'} = \frac{\omega_n}{\omega_t}$$

ou

$$(9) \qquad \frac{\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{ds}{ds'}}{\frac{1}{\tau} \cdot \frac{ds}{ds'} \mp \frac{1}{\tau'}} = \frac{\omega_n}{\omega_t};$$

le point h' venant en H, on a

$$ds - ds' = u_t\, dt$$

ou, en divisant cette égalité par l'équation (4),

$$(10) \qquad \frac{\frac{ds}{ds'} - 1}{\frac{1}{\tau}\frac{ds}{ds'} \pm \frac{1}{\tau'}} = \frac{u_t}{\omega_t};$$

enfin l'élimination de $\frac{ds}{ds'}$ entre les équations (9) et (10) conduit à

$$(11) \qquad \frac{u_t}{\omega_t} = \frac{\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} - \frac{\omega_n}{\omega_t}\left(\frac{1}{\tau} \pm \frac{1}{\tau'}\right)}{\frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\rho'} \pm \frac{1}{\tau'} \cdot \frac{1}{\rho}},$$

et cette formule, jointe à la relation $d = \frac{\omega_t}{u_t} \cdot \frac{\omega_n}{\omega_t}$, permettra de calculer les deux éléments du mouvement, $\frac{\omega_n}{\omega_t}$ et u_t, lorsque d sera donné.

Cas particuliers. — 1° *Cône mobile sur une surface développable.* — Soient B (*fig.* 42, p. 131) le sommet du cône (S), Δ le rayon de courbure de son intersection avec la sphère de rayon δ ayant le point B pour centre, et con-

servons pour (S′) les notations ci-dessus. On a

$$\frac{d\chi}{\delta\, d\alpha} = \frac{1}{\Delta}$$

et les formules (5) et (6) donnent

$$(12) \qquad \frac{d\chi}{d\alpha} = \frac{\frac{a}{h}\, d\alpha' \mp d\chi'}{\left(1 - \frac{a}{h}\frac{\omega_n}{\omega_t}\right) d\alpha'},$$

d'où

$$(12') \qquad \frac{1}{\Delta} = \frac{\frac{a}{h}\cdot\frac{1}{\rho'} \mp \frac{1}{\tau'}}{\frac{\delta}{\rho'}\left(-\frac{a}{h}\frac{\omega_n}{\omega_t} + 1\right)};$$

on déduira de là $\frac{\omega_n}{\omega_t}$, et u_t de la formule (1).

Si le sommet du cône se trouve sur l'arête de rebroussement de (S), on a

$$a = 0, \quad h = 0;$$

mais alors

$$ds' = u_t\, dt = (d\chi \pm d\chi')\frac{u_t}{\omega_t};$$

d'où

$$ds' = \frac{d\chi\frac{u_t}{\omega_t}}{1 \mp \frac{1}{\tau'}\frac{u_t}{\omega_t}} = \frac{\delta\, d\alpha}{\Delta}\cdot\frac{\frac{u_t}{\omega_t}}{1 \mp \frac{1}{\tau'}\frac{u_t}{\omega_t}};$$

et la formule (8′) donne enfin

$$\frac{\omega_n}{\omega_t} = \left(\frac{1}{\rho'} \pm \frac{\Delta}{\delta\tau'}\right)\frac{u_t}{\omega_t} - \frac{\Delta}{\delta}.$$

On arriverait de la même manière à des formules identiques, en supposant que la surface développable soit mobile sur le cône supposé fixe.

2° *Cône mobile sur un cône.* — Soient Δ, Δ' les rayons de courbure des sections faites dans les cônes (S) et (S′) par des sphères de rayon δ, ayant respectivement pour centres les sommets de ces cônes. On a

$$\frac{d\chi}{\delta\, d\alpha} = \frac{1}{\Delta}, \quad \frac{d\chi'}{\delta\, d\alpha'} = \frac{1}{\Delta'}.$$

La formule (12′) peut recevoir ici son application et donne

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\frac{a}{\delta h} \mp \frac{1}{\Delta'}}{1 - \frac{a}{h} \cdot \frac{\omega_n}{\omega_t}},$$

d'on l'on déduira $\frac{\omega_n}{\omega_t}$.

Si $a = 0$ on a $h = 0$, et l'on tire de la formule (8′)

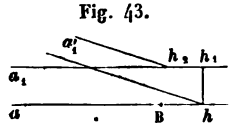
$$\frac{\omega_n}{\omega_t} = \frac{1 - \frac{d\alpha}{d\alpha'}}{\frac{\delta}{\Delta} \cdot \frac{d\alpha}{d\alpha'} \pm \frac{\delta'}{\Delta'}}.$$

Ce rapport pourra être choisi arbitrairement et l'on en déduira ensuite la valeur de $\frac{d\alpha}{d\alpha'}$.

3° *Surface développable mobile sur un cylindre.* — Lorsque l'une des deux surfaces est un cylindre, on a encore les formules (3) et (4); mais la formule (2) n'est plus applicable et il faut chercher directement son équivalente pour le cas actuel.

Supposons que le cylindre soit la surface fixe (S′); soient aB (*fig.* 43) la génératrice de contact; B le point de l'arête de rebroussement de (S) situé sur cette génératrice; $a_1 h_1$ la génératrice de (S) qui vient en contact au bout du temps dt, et conservons les notations précédentes. Le point h décrira les chemins

Fig. 43.



$hh_1 = \omega_t h.dt$, $h_1 h_2 = u_t dt$, respectivement perpendiculaire et parallèle à aB et viendra en h_2 sur la génératrice du cylindre où va avoir lieu le contact. Cette génératrice $a'_1 h_2$ est par suite complétement déterminée en supposant que ω_t, h, u_t soient donnés.

On n'a donc qu'à considérer les équations (3) et (4) qui donnent, en remarquant que $d\alpha' = 0$,

$$(13) \qquad \frac{-d\alpha}{d\chi \pm d\chi'} = \frac{\omega_n}{\omega_t}.$$

Appelant Δ' le rayon de courbure principal du cylindre, on a

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\tau}, \quad \frac{d\chi'}{hh_1} = \frac{d\chi'}{\omega_t h\, dt} = \frac{1}{\Delta'},$$

d'où, eu égard à la relation (4),

$$(14) \qquad \frac{d\chi'}{d\chi \pm d\chi'} = \frac{h}{\Delta'}.$$

Des formules (13) et (14) on tire respectivement

$$\frac{-\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\tau} \pm \frac{d\chi'}{ds}} = \frac{\omega_n}{\omega_t},$$

$$\frac{d\chi'}{\frac{1}{\tau} \pm \frac{d\chi'}{ds}} = \frac{h}{\Delta'},$$

et par l'élimination de $\frac{d\chi'}{ds}$ on arrive à

$$(15) \qquad \frac{\omega_n}{\omega_t} = \frac{\tau}{\rho}\left(\pm \frac{h}{\Delta'} - 1\right).$$

4° *Cône mobile sur un cylindre.* — Soit A le rayon de courbure de la section déterminée dans ce cône par la

sphère de rayon λ ayant pour centre le sommet du cône. On a

$$A = \frac{\lambda d\alpha}{d\chi},$$

et des formules (13) et (14) on tire

$$\frac{-1}{\frac{1}{A} \pm \frac{d\chi'}{\lambda d\alpha}} = \lambda \frac{\omega_n}{\omega_t},$$

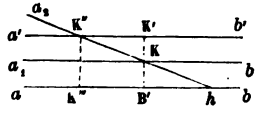
$$\frac{\frac{d\chi'}{\lambda d\alpha}}{\frac{1}{A} \pm \frac{d\chi'}{\lambda d\alpha}} = \frac{h}{\Delta'},$$

d'où

$$(16) \qquad \frac{\omega_n}{\omega_t} = \frac{A}{\lambda}\left(-1 \pm \frac{h}{\Delta'}\right).$$

5° *Cylindre mobile sur une surface développable.* — Supposons maintenant que (S) soit un cylindre et (S') une surface développable. Soient B' (*fig.* 44) le point de l'arête de rebroussement situé sur la génératrice de contact aB'; $a_2 h$ la génératrice de (S') qui vient en contact au bout du temps dt; $a_1 b_1$ la génératrice correspondante de (S); K le pied de la perpendiculaire abaissée de B' sur $a_1 b_1$; ds la distance B'K.

Fig. 44.



En négligeant les termes du second ordre, le point K parcourra dans le temps dt les chemins $KK' = \omega_t h . dt$, $K'K'' = u_t dt$, et viendra se placer en K'' sur $a_2 h$, point qui se projette en K''' sur aB'.

Le triangle K''K'''h donne

$$\overline{K''K'''} \quad \text{ou} \quad \omega_t h . dt + ds = \overline{K'''h}\, d\alpha' \quad \text{ou} \quad (u_t dt + ds)\, d\alpha',$$

et comme cette expression est du second ordre ou nulle, il vient

$$ds = -\omega_t h . dt,$$

et l'on déduira de là le signe de ω_t.

On a, dans le cas actuel,

$$d\alpha' = \omega_n dt,$$

$$d\chi \pm d\chi' = \omega_t dt,$$

$$\frac{d\alpha'}{ds'} = \frac{1}{\rho'}, \quad \frac{d\chi'}{ds'} = \frac{1}{\tau'} \frac{d\chi}{\omega_n h . dt} = \frac{1}{\Delta},$$

et si (S′) est un cône, Λ' et λ' ayant la signification, définie plus haut, de Λ et λ, on a

$$\frac{\Lambda'}{\lambda'} = \frac{d\alpha'}{d\chi'}.$$

Il suit de là que, selon que (S′) sera une surface développable ou un cône, on obtiendra des équations de même forme que (15) et (16) qui se déduiront de ces dernières en y changeant le signe de ω_n et l'accentuation. Il vient ainsi

$$(15') \qquad \frac{\omega_n}{\omega_t} = \frac{\tau'}{\rho'}\left(1 \mp \frac{h}{\Delta}\right),$$

$$(16') \qquad \frac{\omega_n}{\omega_t} = \frac{\Lambda'}{\lambda'}\left(1 \mp \frac{h}{\Delta}\right).$$

6° *Cylindres mobiles l'un sur l'autre.* — Soient ab (*fig.* 44, p. 138) la génératrice de contact; $a_1 b_1$ la génératrice de (S), $a' b'$ celle de (S′), qui viennent se mettre en contact au bout du temps dt. La formule (3) montre que $\omega_n = 0$, d'où $u_n = 0$; et, d'après la formule (1), on a $d = 0$. De sorte que l'axe instantané de rotation et de glissement est parallèle à la génératrice de contact et compris dans le plan normal mené suivant cette droite. Le glissement longitudinal est évidemment arbitraire, et il est inutile de nous en occuper.

Soient Δ et Δ' les rayons de courbure principaux de (S)

et (S′); $d\chi$, $d\chi'$ les angles formés par le plan tangent commun avec les plans tangents à ces deux surfaces menés suivant $a_1 b_1$, $a'b'$; ds la distance de ab, $a_1 b_1$; la distance de $a'b'$ à ab étant $ds + \omega h . dt$, il vient

$$d\chi = \frac{ds}{\Delta}, \quad d\chi' = \frac{ds + \omega h\, dt}{\Delta'}.$$

D'autre part, selon que les cylindres seront extérieurs ou intérieurs aux environs de la génératrice de contact, on aura

$$\omega dt = d\chi \pm d\chi',$$

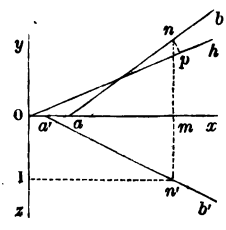
d'où

$$\frac{ds}{dt}\left(\frac{1}{\Delta} \pm \frac{1}{\Delta'}\right) = \omega\left(1 \mp \frac{h}{\Delta'}\right),$$

formule qui fera connaître ds ou $\frac{ds}{dt}$.

108. *Conditions nécessaires pour que l'enveloppe des positions d'une surface gauche mobile se raccorde avec elle.* — Soient Oz (*fig.* 45) l'arête de contact de (S) et de son enveloppe (S′); $a'b'$, ab les projections de l'axe instantané de rotation et de glissement de (S) sur deux plans rectangulaires yOx, xOz, supposés rabattus l'un sur l'autre autour de Ox, dont l'un est perpendiculaire à Oz, tandis que l'autre passe par cette droite; ζ la composante du glissement u suivant le plan yOx, ayant ab pour direction; n, n' les projections sur les plans yOx, xOz d'un point de l'axe instantané; m la projection de (n, n') sur Ox; I la projection de n' sur Oz; $mn = y$, O$m = x$, $mn' = z$; Oh le trace sur yOx du plan tangent en I à (S); ε l'angle hOx que forme ce plan tangent avec le plan xOz; p la projection de n sur Oh; δ, δ' les angles formés

Fig. 45.



par ab, $a'b'$, avec la droite nn'; ω_t la composante parallèle à Oz de la rotation instantanée.

En appliquant ici le raisonnement du n° 106, on reconnaît que, pour tout point I de Oz, on doit avoir

$$Op = \frac{u_n}{\omega_t} = \frac{\zeta}{\omega_t}\cos(\delta + \varepsilon),$$

ou

$$(1) \qquad x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon = \frac{\zeta}{\omega_t}\cos(\delta + \varepsilon).$$

Si l'on représente par b, b' les abscisses à l'origine de ab, $a'b'$, ces deux droites seront représentées par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} y\sin\delta - x\cos\delta = -b\cos\delta, \\ z\sin\delta' - x\cos\delta' = -b'\cos\delta'. \end{cases}$$

En éliminant x, y entre (1) et (2), il vient

$$(3) \begin{cases} (z\,\mathrm{tang}\,\delta' + b')\cos\varepsilon\sin\delta + (z\,\mathrm{tang}\,\delta - b + b')\cos\delta\sin\varepsilon \\ = \dfrac{\zeta}{\omega_t}\cos(\delta + \varepsilon)\sin\delta. \end{cases}$$

On peut supposer que Ox coïncide avec la plus courte distance entre Oz et la génératrice infiniment voisine. Soient x', y' les coordonnées estimées suivant Ox, Oy du point de cette génératrice qui correspond à l'ordonnée z; on a entre x', y', z deux équations de la forme

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = \alpha, \\ y' = kz, \end{cases}$$

k et α étant, pour la position considérée de (S), deux constantes infiniment petites dont le rapport est fini et qui représentent respectivement l'angle et la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines. On tire de là

$$(5) \qquad \mathrm{tang}\,\varepsilon = \frac{y'}{x'} = \frac{k}{\alpha}z = \frac{z}{\nu},$$

en posant $\nu = \dfrac{k}{\alpha}$.

Portant cette valeur dans (3), et remarquant que (1) et (2) donnent, pour le point O ou pour $z = 0$ et $\varepsilon = 0$,

$$b' = \frac{\zeta}{\omega_t} \cos \delta,$$

il vient

$$\frac{1}{\nu} \operatorname{tang} \delta' \cos \delta . z^2 + \left[\left(- b + \frac{\zeta}{\omega_t} \cos \delta \right) \frac{\cos \delta}{\nu} + \sin \delta \operatorname{tang} \delta' + \frac{\zeta}{\omega_t} \frac{\sin^2 \delta}{\nu} \right] z = 0.$$

Cette relation devant être indépendante du point ou de z, il faut que

$$\operatorname{tang} \delta' \cos \delta = 0,$$

$$\left(- b + \frac{\zeta}{\omega_t} \cos \delta \right) \frac{\cos \delta}{\nu} + \sin \delta \operatorname{tang} \delta' + \frac{\zeta}{\omega_t} \frac{\sin^2 \delta}{\nu} = 0.$$

On peut satisfaire à la première de ces conditions en posant $\delta' = 0$, ou $\delta = 90^\circ$. Dans la première hypothèse, l'axe instantané étant compris dans un plan perpendiculaire à Ox, on a nécessairement $\delta = 0$, $b = b' = \frac{\zeta}{\omega_t}$, et la seconde condition est satisfaite d'elle-même.

Si l'on suppose $\delta = 90^\circ$, b est infini, mais $- b \cos \delta$ est une longueur finie c, qui représente l'ordonnée à l'origine, suivant Oy, de la droite ab; et l'on a dès lors,

$$(7) \qquad \operatorname{tang} \delta' = - \frac{c + \frac{\zeta}{\omega_t}}{\nu}.$$

Ainsi, pour qu'une surface gauche mobile se raccorde, à un instant donné, avec son enveloppe, il faut que l'une des deux conditions suivantes soit remplie :

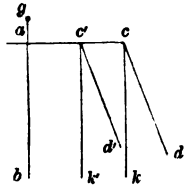
1° *L'axe instantané de rotation et de glissement est compris dans un plan parallèle à la génératrice de contact et perpendiculaire au plan tangent mené au point où cette*

droite est rencontrée par la ligne de striction (*) *de la surface. De plus, la distance de la génératrice de contact au plan qui renferme l'axe instantané est égale à* $\frac{\zeta}{\omega_t}$.

2° *L'axe instantané est parallèle au plan tangent ci-dessus et rencontre la normale au point d'intersection de la génératrice de contact avec la ligne de striction en un point déterminé par la formule* (7).

109. *Des conditions auxquelles doivent satisfaire deux surfaces gauches* (S) et (S'), *l'une fixe et l'autre mobile, pour qu'elles se raccordent constamment.* — Soient (*fig.* 46) ab la génératrice de contact des deux surfaces; $c'd'$ une génératrice infiniment voisine de (S'); $ac' = \alpha'$ la plus courte distance de ces deux droites; k' l'angle que forme $c'd'$ avec sa projection $c'k'$ sur le plan tangent commun en a; c un point de la direction de ac' infiniment voisin de a, distant de ce dernier point de la longueur $ac = \alpha$; ck la parallèle à ab passant par c; cd une droite menée par le point c, perpendiculairement à ac, et faisant avec ck un angle k déterminé par la formule

Fig. 46.



$$\frac{\alpha}{k} = \frac{\alpha'}{k'},$$

cd pourra être considérée comme une génératrice de chacune des surfaces (S) et (S'), et comme représentant la génératrice de (S) qui vient se mettre en contact avec $c'd'$ au bout du temps dt (**).

(*) Nous rappellerons que l'on nomme *ligne de striction* ou de *gorge* d'une surface gauche, la ligne formée par la suite des points où chaque génératrice passe à la plus petite distance de la génératrice suivante.

(**) Cette relation exprime en effet, en se reportant au numéro précédent, que tang ε est indépendant de la position infiniment voisine de l'arête de contact considérée.

D'après ce qui précède, nous avons à faire deux hypothèses sur la position de l'axe instantané de rotation et de glissement.

1° *Cet axe est compris dans un plan parallèle à ab et perpendiculaire au plan tangent abc.* — Soient f le point où l'axe instantané perce le plan mené en a, perpendiculairement à ab, ω_t, ω_n les composantes de ω respectivement parallèle à ab et perpendiculaire au plan bac, en supposant que la décomposition ait été effectuée en f; u_t, u_n les composantes analogues du glissement u; h la hauteur du point f au-dessus du plan bac.

Les rotations ω_t, ω_n, transportées parallèlement à elles-mêmes en a, donnent respectivement les glissements $-\omega_t h$, $-\omega_n b = \frac{\omega_n}{\omega_t} u_n$, dirigés suivant ac et ab. En vertu du premier, le point c vient en c', et l'on a

$$cc' = \alpha - \alpha' = \omega_t h . dt.$$

Quant au second, il se compose avec u_t pour donner la résultante $u_t + \frac{\omega_n}{\omega_t} u_n$. La génératrice cd devant se confondre avec la position $c'k'$, qu'elle doit occuper au bout du temps dt en vertu du mouvement général de (S), il faut pour que cela ait lieu, que $\omega_n = 0$, par suite $\zeta = 0$ et $b = 0$.

La rotation ω n'ayant aucune composante suivant ac, il faut, pour que cd puisse coïncider avec $c'd'$, que $k = k'$, d'où $\alpha = \alpha'$, $\overline{cc'} = 0$, $h = 0$. Ainsi donc l'*axe instantané doit nécessairement coïncider avec la génératrice de contact.*

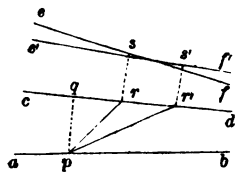
Les lieux géométriques des axes successifs de rotation et de glissement d'un système invariable dans le milieu, entraîné avec le système et dans l'espace absolu, offrent un exemple des conditions de mouvement auxquelles nous venons d'être conduits.

On voit en particulier que, pour obtenir une surface

gauche (S′) qui puisse se mouvoir sur la surface donnée (S) en se raccordant avec elle, il suffit d'incliner les uns sur les autres, suivant une loi donnée, les éléments gauches consécutifs de (S), d'angles infiniment petits, en même temps que l'on fera glisser ces éléments parallèlement aux génératrices communes, suivant une autre loi, de longueurs infiniment petites.

Cela posé, soient (*fig.* 47), à un instant donné, ab, cd les deux génératrices consécutives limitant le contact de (S) et (S′); pq leur plus courte distance; ef, $e'f'$ les génératrices de ces deux surfaces, infiniment voisines de cd, qui viennent en contact au bout du temps dt; rs, $r's'$ les plus courtes distances de cd, ef et de cd, $e'f'$; $d\zeta$, $d\zeta'$ les éléments pr, pr' des courbes de striction de (S), (S′); α, α' les angles qu'ils forment avec ab.

Fig. 47.



Au bout du temps dt, rs, $r's'$ doivent coïncider, ce qui exige que

$$(a) \qquad rr' = u\,dt = d\zeta' \cos\alpha' - d\zeta \cos\alpha,$$

et l'on a, de plus,

$$(b) \qquad pq = d\zeta' \sin\alpha' = d\zeta \sin\alpha.$$

Soient R, R′ les rayons de courbure au point p des sections perpendiculaires à ab faites dans les surfaces (S), (S′); $d\chi$, $d\chi'$ les angles de contingence correspondants; on a, selon le sens relatif des courbures des surfaces,

$$(c) \qquad d\chi \pm d\chi' = \omega\,dt.$$

D'ailleurs

$$R = \frac{d\chi}{pq}, \quad R' = \frac{d\chi'}{pq},$$

d'où

$$(d) \qquad d\zeta \sin\alpha \left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right) = \omega\, dt.$$

Enfin, en éliminant dt entre (a) et (d), on trouve

$$\cot\alpha' = \cot\alpha + \frac{u}{\omega}\left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right),$$

qui est l'expression analytique de la condition à laquelle doivent satisfaire les deux surfaces.

2° *L'axe instantané est perpendiculaire à la normale menée au point où la génératrice de contact est coupée par la ligne de striction.* — Soient (*fig.* 46, p. 143) g le point où l'axe instantané rencontre le plan perpendiculaire en a à ab, supposé rabattu sur le point bac; c la distance ag. En transportant la rotation ω parallèlement à elle-même en a, on obtient une translation dont la résultante avec u a pour composantes $u_t - \omega_t c \tang \delta'$, $\zeta + \omega_t c$ suivant ab et ac. La première ne produit sur cd, dans le temps dt, un déplacement du premier ordre, que dans le sens de sa longueur, puisqu'elle fait un angle infiniment petit avec la direction de cette droite. La seconde donne la relation

$$cc' = \alpha - \alpha' = (\zeta + \omega c)dt.$$

D'ailleurs

$$k - k' = -\omega_t \tang \delta'.\, dt,$$

d'où

$$\frac{\alpha - \alpha'}{k - k'} = \nu = -\frac{\zeta + \omega_t c}{\omega_t \tang \delta'},$$

ce qui est une identité, d'après la condition (7) du n° 108 qui est supposée remplie, et, par conséquent, qui est seule nécessaire pour que le mouvement proposé soit possible.

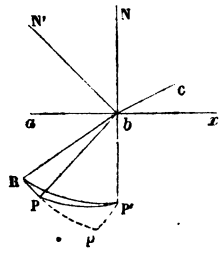
Nous ne nous étendrons pas davantage sur cette question, qui comprend comme cas particulier celle que nous avons étudiée plus haut avec plus de détails.

110. *Digression sur quelques propriétés des surfaces.* — L'étude géométrique du roulement des corps suppose la

connaissance de quelques propriétés relatives à la courbure des surfaces, que nous allons d'abord chercher à établir.

1° *Angle de deux plans normaux menés à une surface suivant deux éléments consécutifs d'une courbe tracée sur cette surface.* — Soient (*fig.* 48)

Fig. 48.



$ab = ds$, bc deux éléments consécutifs de la courbe;

bR la tangente conjuguée à la direction de ab sur la surface;

bN, bN′ les normales aux plans tangents abR, cbR;

bP, bP′ les perpendiculaires en b aux plans abN, bcN′ normaux à la surface;

$d\alpha$ l'angle de contingence cbx de la courbe, formé par cb et le prolongement bx de ab;

β l'angle xbR supplémentaire de l'angle abR formé par les tangentes conjuguées ab, bR;

θ l'angle du plan osculateur abc à la courbe avec le plan normal abN.

L'angle trièdre formé par les droites bc, bR, bx donne

$$\cos cb\mathrm{R} = \cos\beta\cos d\alpha + \sin\beta . d\alpha . \sin\theta = \cos\beta + \sin\beta\sin\theta\, d\alpha.$$

Posant

$$cb\mathrm{R} = \beta + y,$$

il vient

$$y = -\, d\alpha \sin\theta.$$

Soient RPP′ le triangle sphérique déterminé sur la sphère d'un rayon égal à l'unité et de centre b par les droites bR, bP, bP′; P′p l'arc de grand cercle, perpendiculaire sur RP ou son prolongement, abaissé du point P′.

L'angle trièdre formé par les droites bR, bc, bx, donne

par la proportionnalité des sinus des éléments opposés,

$$\text{angle dièdre } \widehat{b\mathrm{R}} = \frac{d\alpha \cos\theta}{\sin cb\mathrm{R}} = \frac{d\alpha \cos\theta}{\sin\beta},$$

en négligeant les termes du second ordre.

D'autre part $\mathrm{P}'p$ peut être considéré comme appartenant à un cercle ayant pour pôle R et pour rayon $\sin \mathrm{R}b\mathrm{P}' = \cos\beta$, de sorte que

$$\mathrm{P}'p = \widehat{b\mathrm{R}} \cos\beta = d\alpha \cot\beta \cos\theta.$$

Enfin le triangle infinitésimal $\mathrm{PP}'p$ donne

$$\mathrm{PP}' = \sqrt{\overline{\mathrm{P}'p}^2 + \overline{\mathrm{P}p}^2},$$

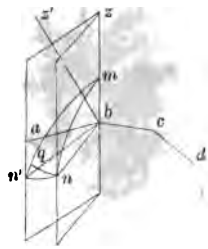
et comme $\mathrm{P}p$ est égal à y, il vient

$$\mathrm{PP}' = d\alpha \sqrt{\cos^2\theta \cot^2\beta + \sin^2\theta},$$

telle est la mesure de l'angle cherché.

2° *Expression du rayon de cambrure d'une courbe tracée sur une surface.* — Soient (*fig.* 49)

Fig. 49.



ab, bc, cd trois éléments consécutifs de la courbe;

bz, bz' les perpendiculaires en b aux plans osculateurs abc, bcd;

nbz, $n'bz$ les plans menés au point b perpendiculairement à ab, bc;

bn, bn' les perpendiculaires, comprises dans ces plans, aux plans normaux à la surface passant par ab, bc;

nmn' le triangle sphérique d'un rayon égal à l'unité et de centre b, déterminé par les droites bn, bn', bz;

$\theta = \widehat{zbn} = mn$; $\theta + d\theta = z'bn'$ les angles aigus formés par les plans osculateurs abc, bcd avec les plans normaux menés suivant ab, bc;

$d\Theta$ l'angle de cambrure $z'bz$ de la courbe;

$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$ le rayon de courbure de la courbe en b correspondant à l'angle de contingence $d\alpha$ et à l'élément $ab = ds$;

$\tau = \frac{ds}{d\Theta}$ le rayon de cambrure de la courbe;

nq l'arc de grand cercle abaissé perpendiculairement du point n sur mn'.

D'après ce que l'on vient de voir, on a

$$nn' = d\alpha\sqrt{\cot^2\beta\cos^2\theta + \sin^2\theta}.$$

Or

$$nq = \sin\overline{mn}.d\alpha = \sin\theta\, d\alpha,$$

par suite

$$\overline{n'q}^2 = \overline{nn'}^2 - \overline{nq}^2 = d\alpha^2\cot^2\beta\cos^2\theta.$$

D'autre part,

$$n'm = \widehat{n'bz'} + \widehat{z'bz} = \theta + d\theta + d\Theta = mn + n'q,$$

d'où

$$n'q = d\theta + d\Theta = \pm d\alpha\cos\theta\cot\beta.$$

Si bz' se trouvait situé de l'autre côté de bz, il faudrait remplacer dans cette formule $d\Theta$ par $-d\Theta$. Pour comprendre tous les cas, nous écrirons

$$d\theta \pm d\Theta = \pm d\alpha\cos\theta\cot\beta,$$

et en divisant par ds

$$(1) \qquad \pm\frac{1}{\tau} = \pm\frac{\cos\theta}{\rho}\cot\beta - \frac{d\theta}{ds}.$$

Il y a ici une ambiguïté de signes que la discussion suivante va faire disparaître.

3° *Du rayon de cambrure des courbes géodésiques.* —

Dans ce cas $\theta = 0$ et

$$\frac{1}{\tau} = \pm \frac{1}{\rho} \cot \beta = \mp \frac{1}{\rho} \cot \beta = \frac{1}{\rho} \sqrt{\cot^2 \beta}.$$

On a ainsi la même relation que pour les hélices cylindriques.

Si le plan osculateur à la courbe fait un angle constant θ avec le plan tangent correspondant, on a

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\rho} \cos \theta \sqrt{\cot^2 \beta} = \frac{1}{\Gamma} \sqrt{\cot^2 \beta},$$

Γ étant, d'après le théorème de Meunier, le rayon de courbure de la section normale.

Ces considérations et la loi de continuité font voir que dans la formule (1) il faut prendre la valeur absolue de $\frac{1}{\rho} \cot \beta$ et écrire tout simplement

$$(2) \qquad \pm \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\Gamma} \sqrt{\cot^2 \beta} - \frac{d\theta}{ds}.$$

On reconnaît ainsi que les secondes courbures de deux courbes osculatrices tracées sur une surface ne diffèrent qu'en raison du rapport $\frac{d\theta}{ds}$ qui caractérise chacune de ces lignes.

Toute section plane faite dans une surface satisfait à la condition

$$(3) \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\Gamma} \sqrt{\cot^2 \beta} = \frac{\cos \theta}{\rho} \sqrt{\cot^2 \beta}.$$

4° *Rayon de cambrure des courbes asymptotiques d'une surface à courbures opposées.* — On sait que si, à partir d'un point quelconque d'une surface, on porte sur la normale une longueur infiniment petite, et que par son extrémité on mène un plan perpendiculaire à la normale, ce plan coupe la surface suivant une courbe infiniment petite du second degré connue sous le nom d'*indicatrice.*

Il nous sera plus commode dans ce qui va suivre de conserver cette dénomination à la courbe finie semblable à la précédente et dont l'équation s'obtient en remplaçant, dans celle de cette dernière, la longueur infiniment petite portée sur la normale par une demi-unité.

En supposant notre indicatrice finie tracée dans le plan tangent et semblablement placée par rapport à l'indicatrice infiniment petite, le carré de chacun de ses rayons vecteurs partant du centre représentera le rayon de courbure de la section normale menée suivant sa direction.

Sur les surfaces à courbures opposées ou à *indicatrice hyperbolique,* il existe deux systèmes de lignes telles, que chacune d'elles est tangente à l'une des asymptotes de l'indicatrice du point correspondant. Ces lignes dont le plan osculateur est tangent à la surface, ont reçu de M. Ch. Dupin le nom de *courbes asymptotiques.*

On obtiendra le rayon de cambrure des courbes asymptotiques, en supposant $\theta = 90^\circ$ dans la formule (2) et cherchant la valeur que prend $\frac{1}{\Gamma}\cot\beta$ qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Soient λ, μ les rayons de courbure principaux de la surface, m la puissance de l'équation de l'indicatrice rapportée à ses asymptotes, δ l'angle de ses asymptotes; on a

$$m \sin\delta = \sqrt{\lambda\mu},$$

et pour l'équation polaire de l'indicatrice

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{m}\,\frac{\sin(\delta-\beta)\sin\beta}{\sin^2\delta} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}}\,\frac{\sin(\delta-\beta)\sin\beta}{\sin\delta}.$$

Enfin la valeur limite que prend $\frac{\cot\beta}{\Gamma}$ en supposant $\beta = 0$ est

$$m \sin\delta = \sqrt{\lambda\mu},$$

d'où

$$\tau = \sqrt{\lambda\mu} = m \sin\delta.$$

Ainsi donc le *rayon de cambrure d'une ligne asymptotique est une moyenne géométrique entre les deux rayons de courbure principaux.*

On reconnaît facilement que ce théorème a également lieu pour les lignes géodésiques d'une surface convexe, tangentes aux deux diamètres conjugués égaux de l'indicatrice.

5° *Théorème sur la courbure des surfaces gauches.* — Dans ce cas τ représentera le rapport $\frac{ds}{d\varepsilon}$ entre la distance ds de deux points consécutifs d'une génératrice, à l'angle $d\varepsilon$ formé par les plans tangents correspondants.

Soient s la distance d'un point d'une génératrice au point où elle est coupée par la ligne de striction, ε l'angle formé par les plans tangents correspondants, ν un coefficient linéaire indépendant de s et ε; on a, d'après la formule (5) du n° 108,

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{s}{\nu},$$

d'où

$$\frac{1}{\tau} = \frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{\cos^2\varepsilon}{\nu}$$

et enfin, d'après ce qui précède,

$$\cos^2\varepsilon = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{\nu}.$$

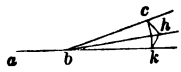
On voit ainsi que ν est *la moyenne géométrique entre les deux rayons de courbure principaux* λ_0, μ_0, *correspondant au point où la génératrice est coupée par la ligne de striction,* et l'on peut écrire

$$\cos^2\varepsilon = \frac{\sqrt{\lambda\mu}}{\sqrt{\lambda_0\mu_0}},$$

ce qui constitue un théorème facile à énoncer.

6° *Relation entre le rayon de cambrure et la courbure de la surface polaire d'une courbe tracée sur une surface* (*). —Conservons les mêmes notations que ci-dessus et soient de plus (*fig.* 50) : bk le prolongement de ab ; bh l'élément de la section normale menée suivant ab et succédant à ce dernier ; $d\zeta$ l'angle de contingence kbh de cette section ; ckh le triangle sphérique infinitésimal déterminé sur la sphère d'un rayon égal à l'unité et de centre b, par les droites bk, bh, bc.

Fig. 50.



Le rayon de courbure en h de la ligne géodésique passant par ab, bh, est

$$\Gamma + \frac{d\Gamma}{ds}\,ds = \Gamma + \frac{R}{\Gamma}\,ds,$$

R étant le rayon de courbure principal au centre de courbure de la surface polaire de cette même ligne.

Le triangle ckh peut être considéré comme rectiligne, et comme les plans cbk, hbk font sensiblement avec le plan tangent cbh les angles $90° - \theta$, $90°$, on a

$$ch = hk \tang \theta,$$

$$\widehat{cbh} = d\zeta \tang \theta.$$

Concevons que par le point h on mène à la surface une section normale parallèle à bc, et soient Γ' son rayon de courbure, D le *rayon d'inflexion* (**) de la surface en b, égal à un infiniment petit près au même rayon relatif à h.

(*) Nous rappellerons que la *surface polaire* d'une courbe gauche est le lieu des intersections successives des plans normaux à cette courbe.

(**) Nous appelons *rayon d'inflexion d'une surface*, en un point correspondant à la direction d'une tangente en ce point, le rapport entre la distance du même point et un point infiniment voisin de la tangente, et l'angle des tangentes à la surface menées en ces points, perpendiculairement à la direction de la première tangente.

On a, d'après la formule connue sur la courbure des surfaces, en négligeant les termes du second ordre,

$$\frac{1}{\Gamma'} = \frac{1}{\Gamma + \frac{R}{\Gamma} ds} \cos^2 cbh + \frac{2}{D} \cos cbh \,.\, \sin cbh$$

$$= \frac{1}{\Gamma + \frac{R}{\Gamma} ds} + \frac{2}{D} d\zeta \tang \theta,$$

d'où

$$\Gamma' = \Gamma + \frac{R}{\Gamma} ds - \frac{2\Gamma^2}{D} d\zeta \tang \theta.$$

La distance ch étant du second ordre, on peut regarder Γ' comme étant le rayon de courbure de la section normale menée suivant bc; de sorte que la variation éprouvée par le rayon de courbure de la section normale en parcourant deux éléments consécutifs d'une courbe donnée est représentée par

$$(a) \qquad \frac{R}{\Gamma} ds - \frac{2\Gamma^2}{D} d\zeta \tang \theta = \left(\frac{R}{\Gamma} - \frac{2\Gamma}{D} \tang \theta\right) ds.$$

Le rayon de courbure de la courbe étant

$$\rho = \Gamma \cos \theta,$$

il vient, en représentant par r le rayon de courbure principal de la surface polaire au centre de courbure,

$$\frac{r}{\rho} = \frac{d(\Gamma \cos \theta)}{ds} = \cos \theta \cdot \frac{d\Gamma}{ds} - \Gamma \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{ds},$$

et comme $\frac{d\Gamma}{ds} ds$ n'est autre chose que l'expression (a), il vient

$$\frac{r}{\rho} = \left(\frac{R}{\Gamma} \cos \theta - \frac{2\Gamma}{D} \sin \theta\right) - \Gamma \sin \theta \frac{d\theta}{ds},$$

et en éliminant $\frac{d\theta}{ds}$ au moyen de l'équation (2),

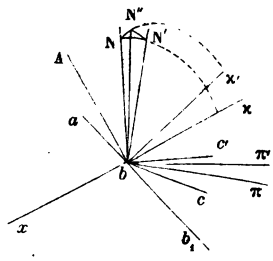
$$\frac{r}{\rho} = \frac{R}{\Gamma}\cos\theta - \sin\theta\left(\frac{2\Gamma}{D} + \sqrt{\cot^2\beta} \pm \frac{\Gamma}{\tau}\right).$$

Dans le cas d'une section plane $\tau = 0$, et l'on retrouve sous une autre forme la loi de la déviation dans les sections obliques, découverte par M. Transon (*).

111. *Expressions analytiques des conditions qu'exige le roulement de deux surfaces l'une sur l'autre.* — Lorsqu'un corps (S) roule sur un autre corps (S′) supposé fixe, les points de contact successifs forment sur leurs surfaces respectives deux lignes que nous avons appelées *courbes correspondantes de roulement.*

Soient à un instant quelconque (*fig.* 51), $ab = ds$ l'élément commun aux courbes de roulement correspondant au point de contact b des surfaces ; bc, bc' les éléments qui lui succèdent sur (S) et (S′) au bout du temps dt; bN la normale commune aux surfaces ; bA l'axe instantané de rotation, A l'angle qu'il forme avec bN ; ω la vitesse angulaire correspondante dont le sens est supposé de la droite vers la gauche pour l'observateur couché suivant Ab en ayant les pieds en b ; bx la projection de Ab sur le plan tangent en b ; bb_1 le prolongement de ab ; $b\pi$, $b\pi'$ les tangentes conjuguées à bb_1 sur (S) et (S′) ; $b\varkappa$, $b\varkappa'$ les directions que prennent ces droites en les faisant tourner de 90° autour du point b de la droite vers la gauche, dans le plan tangent commun ; bN′, bN″ les normales aux plans tangents $cb\pi$, $c'b\pi'$; β, β_1, β'_1 les angles formés par bb_1, $b\pi$, $b\pi'$ avec bx ; $d\varphi$, $d\varphi'$, les angles NbN′, NbN″ des plans $cb\pi$, $cb\pi'$ avec le

Fig. 51.



(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VI.

plan xbb_1; ρ, ρ' les rayons de courbure des sections normales à (S) et (S′) menées suivant ab.

Pour que, en vertu de la rotation ω, le plan tangent $cb\pi$ vienne coïncider avec le plan tangent correspondant de (S′), il faut et il suffit : 1° que Ab fasse des angles égaux avec ses projections sur ces deux plans, ce qui revient à dire que les composantes de ω, normales à ces mêmes plans, doivent être égales; 2° que l'angle des plans projetants de Ab soit égal à $\omega . dt$.

Première condition. — La rotation ω peut être considérée comme la résultante des suivantes :

$$\begin{aligned} &\omega \cos A && \text{dirigée suivant } Nb, \\ &\omega \sin A \cos \beta_1 && \text{dirigée suivant } b\pi, \\ &-\omega \sin A \sin \beta_1 && \text{dirigée suivant } bx. \end{aligned}$$

Nous supposerons d'abord avec la figure que $\beta_1 > \beta$, et que le centre de courbure de la section normale à (S) suivant ab est situé sur bN et non sur son prolongement, ou encore que, suivant ab, la surface oppose sa convexité au plan tangent en b.

Dans ces conditions, bN' fait un angle obtus avec bx, et l'on a pour la composante de ω suivant bN'

$$\omega \cos A \cos d\varphi + \omega \sin A \sin \beta_1 \sin d\varphi = \omega \cos A + \omega \sin A \sin \beta_1 d\varphi.$$

Or l'angle trièdre formé par les droites cb, $b\pi$, bb_1, donne, en remarquant que l'angle dièdre $b\pi$ est égal à $d\varphi$,

$$\frac{\sin cbb_1}{\sin d\varphi} = \frac{\sin cb\pi}{\sin(\text{angle dièdre } bb_1)},$$

ou, en remarquant que $\widehat{cb\pi}$ peut être supposé égal à $\beta_1 - \beta$,

$$d\varphi = \frac{\widehat{cbb_1} \sin(\text{angle dièdre } bb_1)}{\sin(\beta_1 - \beta)},$$

et comme $\frac{\widehat{cbb_1}}{ds}$ n'est autre chose que l'inverse du rayon de

courbure de la courbe *abc*, il vient, d'après le théorème de Meunier,

$$d\varphi = \sin(\beta_1 - \beta)\frac{ds}{\rho},$$

et la composante ci-dessus de ω prend la forme

$$\omega\left(\cos A + \sin A\,\frac{ds}{\rho}\,\frac{\sin\beta_1}{\sin(\beta_1 - \beta)}\right).$$

Cette formule s'applique également au cas où $\beta_1 < \beta$, car alors l'angle $N'b\varkappa$ est aigu, et le terme en $d\varphi$ change de signe, ce que comprend implicitement cette dernière formule.

On reconnaîtra de la même manière que si la courbure change de sens par rapport au plan tangent en b, il faut changer le signe de ρ.

La première condition se trouve donc exprimée par la relation

$$(1)\qquad \frac{1}{\rho}\,\frac{\sin\beta_1}{\sin(\beta_1 - \beta)} = \frac{1}{\rho'}\,\frac{\sin\beta'_1}{\sin(\beta'_1 - \beta)},$$

dans laquelle ρ et ρ' seront considérés comme étant de même signe ou de signes contraires, selon que les courbures des surfaces suivant *ab* seront de même sens ou de sens opposé.

Deuxième condition. — On satisfera à cette condition en exprimant que l'angle $N'bN''$ est décrit en vertu de ω, ou tout simplement de la composante $\omega \sin A$ suivant $b\varkappa$, la composante suivant bN ne faisant subir à bN' qu'un déplacement du second ordre; ce qui revient à poser $\widehat{N'bN''} = \omega \sin A\,dt$.

Soit $NN'N''$ le triangle sphérique infinitésimal déterminé par les normales bN, bN', bN'' sur la sphère de centre b et d'un rayon égal à l'unité, triangle que l'on peut évidemment considérer comme rectiligne. L'angle N sera égal à $\beta'_1 - \beta_1$ si les angles $\varkappa bN'$, $\varkappa' bN''$ sont tous deux aigus ou obtus, ou à $180^\circ - (\beta'_1 - \beta_1)$ si l'un est obtus

et l'autre aigu. On a ainsi, selon l'un ou l'autre cas, en remarquant que $N'N'' = \omega \sin A\, dt$,

$$\omega^2 \sin^2 A\, dt^2 = d\varphi'^2 + d\varphi^2 \mp 2\, d\varphi\, d\varphi' \cos(\beta'_1 - \beta_1),$$

ou, eu égard aux valeurs algébriques de $d\varphi$, $d\varphi'$, et à la convention établie sur les signes de ρ, ρ',

$$\frac{\omega^2}{\frac{ds^2}{dt^2}} = \frac{1}{\rho^2 \sin^2(\beta_1 - \beta)} + \frac{1}{\rho'^2 \sin^2(\beta'_1 - \beta)} - \frac{2}{\rho\rho'} \frac{\cos(\beta'_1 - \beta_1)}{\sin(\beta_1 - \beta)\sin(\beta'_1 - \beta)}.$$

Cette formule peut se mettre sous une forme plus simple; car en remplaçant les sinus et cosinus de $\beta_1 - \beta$, $\beta'_1 - \beta$ par leurs valeurs en fonction des cotangentes, on a

$$\frac{\omega^2 \sin^2 A}{\frac{ds^2}{dt^2}} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)^2 + \left[\frac{1}{\rho}\cot(\beta_1 - \beta) - \frac{1}{\rho'}\cot(\beta'_1 - \beta)\right]^2;$$

or l'équation (1) donne

$$\frac{1}{\rho}\cot(\beta_1 - \beta) - \frac{1}{\rho'}\cot(\beta'_1 - \beta) = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\cot\beta,$$

par suite

$$\frac{\omega \sin A}{\frac{ds}{dt}} = \pm\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\frac{1}{\sin\beta}.$$

La rotation ω et la vitesse $\frac{ds}{dt}$ du point de contact étant positives, on devrait prendre, parmi les deux signes du second membre, celui qui en rend la valeur positive. Mais si l'on veut que cette formule donne le sens dans lequel le point de contact se déplace, il faut prendre tout simplement

$$(2) \qquad \frac{\omega \sin A}{\frac{ds}{dt}} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)\frac{1}{\sin\beta},$$

et des valeurs de signes contraires pour $\frac{ds}{dt}$ indiqueront que la tendance au roulement aura lieu d'un côté ou de

l'autre de la droite bx pour l'observateur couché suivant cette droite en ayant les pieds en b. En supposant que (S') soit un plan ou que ρ' soit infini, $\frac{ds}{dt}$ est positif, le point de contact se transporte au bout du temps dt à droite de xb, comme on l'a supposé sur la figure, ce qui définit le sens de $\frac{ds}{dt}$ pour ses valeurs positives et par suite pour ses valeurs négatives.

On peut arriver d'une autre manière à la formule (2). En effet, il est clair que les angles Abc, Abc' peuvent être considérés comme égaux à l'angle $i = Abc_2$ formé par Ab avec la trace bc_2, sur le plan tangent, du plan cbc', puisque les angles $cbc_2 = d\lambda$, $c'bc_2 = d\lambda'$ sont infiniment petits. Le déplacement angulaire cbc' étant égal à $\omega dt \sin i$, il vient

$$\omega dt = \frac{d\lambda - d\lambda'}{\sin i}.$$

Soit θ l'angle formé avec le plan tangent par le plan mené par l'axe instantané OA et bb_1 ou bc; le plan $c'bc$ nécessairement perpendiculaire à bA fait avec le plan tangent un angle égal à $90^\circ - \theta$ à un infiniment petit près, et l'angle trièdre déterminé par les droites bx, bc_2, Ab, donne

$$(\lambda) \qquad \cos i = \sin A \cos c_2 bx = \sin A \cos \beta$$

et

$$\sin A = \cos i \cos \beta + \sin i \sin \beta \cos \theta,$$

d'où

$$(\mu) \qquad \sin A \sin \beta = \sin i \cos \theta.$$

D'ailleurs on a, d'après le théorème de Meunier,

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{\rho \cos \theta}, \quad \frac{d\lambda'}{ds} = \frac{1}{\rho' \cos \theta},$$

par suite

$$\frac{\omega dt}{ds} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right) \frac{1}{\cos \theta \sin i} = \frac{1}{\sin A . \sin \beta} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right).$$

Cette formule exprime que *le déplacement angulaire infiniment petit* $\omega \sin A \sin\beta\, dt$ *de* (S) *autour de la perpendiculaire, menée dans le plan tangent, à l'élément commun aux courbes de roulement, est égal à la somme algébrique des angles de contingence de ces courbes.*

112. *Les courbes de roulement étant données, déterminer la position de l'axe instantané.* — La formule (1) donne

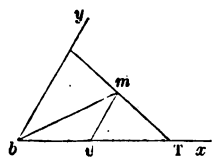
$$\cot\beta = \frac{\frac{1}{\rho}\cot(\beta_1 - \beta) - \frac{1}{\rho'}\cot(\beta'_1 - \beta)}{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}},$$

et permet ainsi de trouver la position du plan projetant de l'axe instantané sur le plan tangent, puisque les angles $\beta_1 - \beta$, $\beta'_1 - \beta$ formés par la tangente aux courbes de roulement avec ses conjuguées sur les deux surfaces sont supposés donnés.

L'angle A peut être choisi arbitrairement et l'on peut, si l'on veut, le supposer égal à 90°, l'axe instantané étant dès lors compris dans le plan tangent. En se donnant la vitesse $\frac{ds}{dt}$ du point de contact, la formule (2) fera connaître la vitesse angulaire ω.

113. *Connaissant les éléments qui fixent la nature du mouvement de* (S) *sur* (S'), *déterminer les courbes de roulement.* — Soient (*fig.* 52) by une droite menée dans le plan tangent en b, faisant avec bx un angle δ; bm la direction de l'élément commun aux courbes de roulement; m le point correspondant de l'indicatrice de (S); mT la tangente en ce point rencontrant bx au point T; U le point de rencontre de bx avec la pa-

Fig. 52.



rallèle à by menée par le point m ; on a

$$\widehat{mbx} = \beta, \quad \widehat{mTx} = \beta_1, \quad \overline{bm}^2 = \rho,$$

par suite

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin(\beta_1 - \beta)} = \frac{bm}{bT}$$

et

$$(3) \qquad \frac{\sin\beta_1}{\rho\sin(\beta_1 - \beta)} = \frac{1}{bm \,.\, bT}.$$

En considérant bm comme ayant le même signe que ρ, et bT comme positif ou négatif selon que le point T sera d'un côté ou de l'autre du point b, on se conformera aux conventions établies plus haut.

Nous avons maintenant à considérer trois cas :

Premier cas. — *La projection de l'axe instantané sur le plan tangent n'est pas une asymptote de l'une des deux indicatrices.*

Supposons que by soit le diamètre de l'indicatrice de (S) conjugué à bx, et soit a le rayon de courbure de la section normale menée suivant cette dernière direction en valeur absolue, on a

$$bT = \frac{a}{bU} = \frac{a\sin\delta}{bm\sin(\delta - \beta)},$$

par suite

$$(4) \qquad \frac{\sin\beta_1}{\rho\sin(\beta_1 - \beta)} = \frac{1}{bm \,.\, bT} = \frac{\sin(\delta - \beta)}{a\sin\delta}.$$

Dans le cas d'une indicatrice elliptique ou parabolique, il est clair que le signe de $\sin(\delta - \beta)$ correspond bien à celui de $\sin(\beta_1 - \beta)$, et il suffit dès lors d'attribuer à a le signe de ρ.

Si l'indicatrice est hyperbolique, $\rho\sin(\beta_1 - \beta)$ ne change de signe qu'avec $\sin(\delta - \beta)$; car ρ passe du positif au négatif avec $\sin(\beta_1 - \beta)$, lorsque $\beta < \delta$, et $\sin(\beta_1 - \beta)$

change de nouveau de signe lorsque, ρ restant négatif, β devient supérieur à δ.

La formule (4) est donc générale, et l'on a, en donnant à a et à son équivalent a' relatif à (S′) les signes qui leur conviennent,

$$\frac{1}{a}\frac{\sin(\delta-\beta)}{\sin\delta}=\frac{1}{a'}\frac{\sin(\delta'-\beta)}{\sin\delta'},$$

δ' ayant pour (S′) la même signification que δ pour (S), d'où

$$(5)\qquad \operatorname{tang}\beta=\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a'}}{\dfrac{1}{a}\cot\delta-\dfrac{1}{a'}\cot\delta'}.$$

Désignant par b, b' les diamètres conjugués à a et a', pris avec leurs signes, on a

$$(6)\qquad \begin{cases}\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{a}\dfrac{\sin^2(\delta-\beta)}{\sin^2\delta}+\dfrac{1}{b}\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\delta},\\[2ex] \dfrac{1}{\rho'}=\dfrac{1}{a'}\dfrac{\sin^2(\delta'-\beta)}{\sin^2\delta'}+\dfrac{1}{b'}\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\delta'}.\end{cases}$$

Enfin l'élimination de ρ, ρ', β entre les équations (2), (5), (6) conduit à la relation

$$\frac{\omega\sin A}{\dfrac{ds}{dt}}=\frac{\sin^2(\delta-\delta')+(a-a')\left(\dfrac{1}{b}\sin^2\delta'-\dfrac{1}{b'}\sin^2\delta\right)}{\sin\delta\sin\delta'\sqrt{a^2\sin^2\delta+a'^2\sin^2\delta'\mp 2aa'\sin\delta\sin\delta'\cos(\delta'-\delta)}},$$

qui fera connaître la vitesse du point de contact $\dfrac{ds}{dt}$. On remarquera que les conditions relatives au roulement ne dépendent que de la projection de ω sur le plan tangent.

Discussion. — 1° Si $\delta=\delta'$, on a $\beta=\delta$. *Donc, si les diamètres des indicatrices, conjugués à la projection de la rotation instantanée, coïncident, les courbes de roulement sont tangentes à leur direction.*

Dans ce cas, $\rho = b$, $\rho' = b'$, la formule (2) donne

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\omega \sin A \sin \delta}{\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}}.$$

L'égalité $\beta = \delta$ pourra être considérée comme ayant encore lieu en général lorsque de plus on aura $\delta = \delta'$, quoique la formule (5) donne alors pour tang β une valeur de la forme $\frac{0}{0}$, et il n'y aura indétermination que dans des cas très-particuliers. En effet, la formule (2) donne, dans l'hypothèse actuelle,

$$ds \sin \beta = \frac{\omega \sin A}{\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}} \sin^2 \delta \, dt,$$

et l'on voit que si le roulement pouvait avoir lieu dans toutes les directions, le lieu des points de contact au bout du temps dt serait une droite parallèle à $\omega \sin A$. Or ceci n'est possible que si, aux environs du point de contact, les deux surfaces sont réglées et même développables, puisque, par hypothèse, nous avons admis que $\omega \sin A$ n'est pas une asymptote de l'indicatrice; il faut donc que $a = \infty$, $a' = \infty$.

Si les surfaces ne sont pas développables, les formules ci-dessus donnent la loi du roulement des deux surfaces développables circonscrites dont la génératrice commune coïncide en direction avec $\omega \sin A$, et qui touchent (S) et (S') suivant un élément commun. Or il est clair que le mouvement de ces surfaces développables détermine celui de (S) et (S'); mais alors le point de contact de ces dernières ne peut se mouvoir que dans la direction des courbes suivant lesquelles elles sont touchées par les précédentes, et l'on a forcément $\beta = \delta$ comme dans le cas examiné plus haut où a est différent de a'.

Si, de plus, b et b' sont égaux et de même signe, on a

$$\frac{ds}{dt} = \infty,$$

et sous le rapport géométrique le roulement est impossible; les deux surfaces s'osculent, s'emboîtent en quelque sorte au point de contact, et une rotation finie ω autour d'un axe passant par ce point ne peut produire sur le corps mobile un déplacement élémentaire du premier ordre.

Pour bien voir à quoi tient cette impossibilité, considérons en particulier deux cylindres s'osculant suivant leur génératrice de contact, et concevons un plan normal à cette génératrice, coupant les surfaces suivant deux sections droites. Ces deux sections ne pourront rouler l'une sur l'autre en vertu de la rotation finie ω, puisque l'angle formé par les deux éléments qui succèdent à celui du contact est du second ordre, tandis que le déplacement angulaire ωdt est du premier. Le roulement ne sera possible que dans le cas où la rotation se réduira à une accélération angulaire μ donnant lieu au déplacement élémentaire $\frac{1}{2}\mu dt^2$.

Mais en se reportant à la nature physique des corps, cette impossibilité géométrique ne se réalisera pas, car les corps en contact se dépriment mutuellement d'une quantité finie, quoique très-petite, ce qui donne lieu au *frottement de roulement*, et dès lors, aux environs de l'arête de contact, les surfaces ne sont plus continues comme nous l'avons supposé, et les éléments superficiels des cylindres, succédant à la zone de contact ou de dépression, ne forment plus un angle du second ordre. Il suit de là que, dans les cas particuliers de la nature de celui que nous venons d'examiner, notre théorie géométrique est en défaut, ou les résultats qu'elle fournit ne sont plus admissibles comme approximatifs, puisque alors la compressibilité de la matière que nous avons négligée, comme il est permis de le faire en général, joue ici le rôle le plus important.

Si $b = \infty$, $b' = \infty$, on a

$$\frac{ds}{dt} = \infty,$$

et, en effet, les lignes suivant lesquelles le point de contact peut se déplacer sur les surfaces se touchent suivant des points d'inflexion en s'osculant, et l'on rentre dans le cas précédent.

2° Si, δ étant différent de δ', on a $a = a'$, il vient $\beta = 0$; mais il est clair que le mouvement est impossible, car la rotation $\omega \sin A$ ne peut faire rouler, l'une sur l'autre dans leur plan, les sections normales menées suivant la direction de cette rotation.

Deuxième cas. — *La projection de l'axe intantané sur le plan tangent est une asymptote de l'une des indicatrices.*

Admettons que bx soit une asymptote de l'indicatrice supposée hyperbolique de la surface (S), et soient m la puissance de cette courbe et δ l'angle de ses asymptotes. L'équation polaire de l'indicatrice est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sin\beta \sin(\delta - \beta)}{m \sin^2\delta},$$

d'où l'on tire

$$b\mathrm{T} = \frac{2m \sin\delta}{\sqrt{\rho} \cdot \sin\beta},$$

et la formule (3) donne par suite

$$(\beta) \qquad \frac{1}{\rho} \frac{\sin\beta_1}{\sin(\beta - \beta_1)} = \frac{\sin\beta}{2m \sin\delta}.$$

Cette formule convient à tous les cas, car $\rho \sin(\beta - \beta_1)$ conserve le même signe quand ρ passe du négatif au positif.

On a donc, en étendant à m la convention ci-dessus sur le signe de a',

$$\frac{\sin\beta}{2m \sin\delta} = \frac{1}{a'} \frac{\sin(\delta' - \beta)}{\sin\delta'},$$

d'où

$$(a) \qquad \operatorname{tang}\beta = \frac{\frac{2m}{a'}\sin\delta}{1 + \frac{2m}{a'}\sin\delta\cot\delta'}.$$

Si la surface n'est pas réglée, on prendra la formule

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\pm\frac{\tau}{a'}}{1 \mp \frac{\tau}{a'}\cot\delta'},$$

τ désignant (110, p. 151) le rayon de cambrure de la courbe asymptotique de (S).

Dans le cas où cette surface serait gauche, on emploierait l'équation

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\pm\sqrt{\lambda_0\mu_0}\cdot\frac{1}{\cos^2\varepsilon}}{a' \mp \sqrt{\lambda_0\mu_0}\cdot\frac{\cot\delta'}{\cos^2\varepsilon}}.$$

La discussion de ces formules offrant peu d'intérêt, nous ne nous y arrêterons pas, de même que nous ne chercherons pas le résultat de la substitution de la valeur ci-dessus de β dans l'équation (2).

Troisième cas. — *La projection de l'axe instantané sur le plan tangent est une asymptote commune aux deux indicatrices. — Application aux engrenages sans glissement.*

Soient m' la puissance positive ou négative de l'indicatrice de (S'), δ l'angle de ses asymptotes, on a, d'après les formules (1) et (β),

$$(\delta) \qquad \frac{\sin\beta}{m\sin\delta} = \frac{\sin\beta}{m'\sin\delta'}.$$

Si $m\sin\delta$ est différent de $m'\sin\delta'$, cette formule ne peut

être satisfaite que par $\beta = 0$: en d'autres termes, *les courbes de roulement sont les courbes asymptotiques des surfaces*.

Ce résultat conduit à une explication très-simple de l'engrenage *sans frottement* ou *sans glissement* attribué à White, mais imaginé par Hooke (*).

Concevons que sur les cylindres primitifs, roulant l'un sur l'autre, on trace deux hélices de même sens, dont les pas soient proportionnels aux rayons de ces cylindres, et qu'un profil se meuve parallèlement à lui-même et perpendiculairement aux génératrices de chaque cylindre, en s'appuyant sur chaque hélice par l'un de ses points, où sa tangente est normale à ce cylindre; on obtiendra deux surfaces ayant pour lignes asymptotiques les deux hélices qui ont été construites de manière à pouvoir rouler l'une sur l'autre; et comme la projection de l'axe instantané sur le plan tangent au point de contact de ces surfaces est dirigée suivant la tangente commune aux deux hélices, il s'ensuit que les deux filets hélicoïdaux rouleront l'un sur l'autre suivant ces courbes.

Si l'on voulait construire un engrenage conique sans glissement, on tracerait sur les cônes primitifs deux lignes géodésiques telles, que les droites obtenues après le développement des cônes pussent coïncider; on ferait alors mouvoir le profil normalement à chacune des lignes géodésiques directrices.

En substituant dans la formule (2) les valeurs de $\frac{1}{\rho \sin \beta'}$, $\frac{1}{\rho' \sin \beta}$ tirées de l'équation (β) dans laquelle on aurait sup-

(*) *Voyez* les *Principes of Mechanism* de M. R. Willis, et le *Rapport* de M. Poncelet sur les machines et outils employés dans les manufactures fait à la Commission française du Jury international de l'Exposition universelle de Londres; 1857, IIe vol., p. 230.

posé $\beta = 0$, il vient

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\omega \sin A}{\frac{1}{m \sin \delta} - \frac{1}{m' \sin \delta'}} = \frac{\omega \sin A}{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}},$$

τ, τ' ayant les rayons de cambrure des lignes asymptotiques, considérés comme étant de même signe ou de signes contraires, selon les conventions établies plus haut sur les signes de ρ et ρ'.

Si l'on suppose que $m \sin \delta$ et $m' \sin \delta'$ soient égaux et de même signe, le roulement sera généralement impossible, quoique la formule (δ) indique que β est indéterminé. En effet, si l'on suppose $m \sin \delta = m' \sin \delta'$ dans les formules qui donnent les valeurs de $\frac{1}{\rho \sin \beta}$, $\frac{1}{\rho' \sin \beta'}$, de l'équation (3) on tire

$$ds \sin \beta = \frac{\omega \sin A \, m \sin \delta}{\cot \delta' - \cot \delta} dt.$$

L'élément $ds \sin \beta$ étant indépendant de β, le lieu des points de contact au bout du temps dt se projettera sur le plan tangent suivant une parallèle à $\omega \sin A$; ce qui ne sera possible que dans un certain nombre de cas particuliers, comprenant notamment celui des surfaces gauches, le seul que nous ayons à examiner, pour lequel on a

$$m \sin \delta = \frac{\nu}{\cos^2 \varepsilon} = \frac{\nu'}{\cos^2 \varepsilon'},$$

$\nu = \sqrt{\lambda_0 \mu_0}$, $\nu' = \sqrt{\lambda'_0 \mu'_0}$ étant des constantes; ε, ε' les angles formés par le plan tangent commun avec les plans tangents de (S), (S'), aux points où la génératrice de contact est coupée par les lignes de striction. Appelant η l'angle de ces deux derniers plans, on a

$$\varepsilon' = \varepsilon + \eta$$

et

$$\frac{\nu}{\cos^2\varepsilon} = \frac{\nu'}{\cos^2(\varepsilon + \eta)}.$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit ε, on en déduit $\nu = \nu'$, $\eta = 0$. Donc les lignes de striction de (S), (S′) coupent au même point la génératrice commune, et si les surfaces ont même plan tangent en un point de la génératrice de contact, il en est de même pour tout autre point de cette génératrice, ce qui est conforme aux résultats obtenus au n° 109.

On voit ainsi que lorsque deux surfaces gauches peuvent rouler l'une sur l'autre en se raccordant, les puissances de leurs indicatrices sont de même signe ou la courbure des sections normales peu inclinées sur la génératrice de contact est de même sens. On peut s'en assurer directement, en faisant tourner autour de la génératrice un élément gauche de manière que la courbure soit nulle dans le sens perpendiculaire à cette génératrice. Que l'on déplace ensuite cet élément dans un sens ou dans l'autre, l'asymptote de l'indicatrice se portera à droite ou à gauche de la direction ci-dessus; mais, dans les deux cas, le sens de la courbure aux environs de la génératrice restera le même.

On remarquera que *lorsque deux surfaces gauches peuvent rouler l'une sur l'autre, la moyenne géométrique entre les rayons de courbure principaux en un point de la génératrice de contact est la même pour les deux surfaces*. On vérifie ainsi dans un cas particulier le théorème de Gauss sur les surfaces qui peuvent s'appliquer l'une sur l'autre, et qui devient évident pour deux surfaces quelconques à courbures opposées en employant la considération de l'hyperboloïde osculateur.

114. *Relations entre les rayons de courbure γ, γ' des courbes de roulement et les angles d'inclinaison φ et φ' des plans osculateurs correspondants sur le plan tangent*

(*fig.* 51, p. 155). — Les angles φ, φ' étant ceux que forment respectivement les plans abc, abc' avec le plan abx, θ ayant la même signification qu'au n° 111, l'angle trièdre formé par les droites $b\mathrm{A}$, bc, ba donne

$$\cos \mathrm{A}bc = \cos \mathrm{A}ba \cos abc + \sin \mathrm{A}ba . \sin abc \cos(\varphi - \theta),$$

ou, comme l'angle abc est le supplément de $\frac{ds}{\gamma}$ et en négligeant les termes du second ordre,

$$\cos \mathrm{A}bc = -\cos \mathrm{A}ba + \sin \mathrm{A}ba \cdot \frac{ds}{\gamma} \cos(\varphi - \theta);$$

on trouverait de même

$$\cos \mathrm{A}bc' = -\cos \mathrm{A}ba + \sin \mathrm{A}ba \cdot \frac{ds}{\gamma'} \cos(\varphi' - \theta),$$

et comme les angles $\mathrm{A}bc$, $\mathrm{A}bc'$ sont égaux, il en résulte l'égalité

$$(6) \qquad \frac{1}{\gamma} \cos(\varphi - \theta) = \frac{1}{\gamma'} \cos(\varphi' - \theta),$$

résultat que l'on peut énoncer ainsi : *Les axes des cercles osculateurs des courbes de roulement en leur point de contact se coupent en un point situé dans le plan qui passe par l'axe instantané et la tangente commune aux deux courbes.*

Si les deux plans osculateurs sont normaux à ce dernier plan, la formule (6) est satisfaite d'elle-même, et γ et γ' peuvent être choisis indépendamment l'un de l'autre si l'on a le choix de la rotation instantanée.

Dans tous les cas, il faut se rappeler qu'entre γ, γ', ρ, ρ' on a les relations

$$(7) \qquad \begin{cases} \gamma = \rho \sin \varphi, \\ \gamma' = \rho' \sin \varphi. \end{cases}$$

115. *Relation entre la rotation instantanée et les rayons*

de courbure des courbes de roulement. — Supposons que β, β_1, β'_1 et θ aient la même signification qu'au n° 111 et soient Δ, Δ' les angles $\varphi - \theta$, $\varphi' - \theta$, formés par les plans osculateurs aux courbes de roulement avec le plan mené par leur tangente commune et l'axe instantané. On a

$$(8)\qquad \begin{cases} \varphi = \theta + \Delta, \quad \varphi' = \theta + \Delta', \\ \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{\gamma}\sin(\Delta + \theta), \quad \dfrac{1}{\rho'} = \dfrac{1}{\gamma'}\sin(\Delta' + \theta), \\ \dfrac{1}{\gamma}\cos\Delta = \dfrac{1}{\gamma'}\cos\Delta'. \end{cases}$$

La formule (2) devient alors, eu égard à la relation (μ) établie p. 159,

$$(9)\qquad \begin{cases} \omega\dfrac{dt}{ds} = \left[\dfrac{1}{\gamma}\sin(\Delta + \theta) - \dfrac{1}{\gamma'}\sin(\Delta' + \theta)\right]\dfrac{1}{\sin A \sin\beta} \\ \qquad\quad = \left[\dfrac{1}{\gamma}\sin(\Delta + \theta) - \dfrac{1}{\gamma'}\sin(\Delta' + \theta)\right]\dfrac{1}{\sin i \cos\theta} \end{cases}$$

ou

$$\omega\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\gamma\cos\Delta'}\left[\sin(\Delta + \theta)\cos\Delta' - \sin(\Delta' + \theta)\cos\Delta\right]\frac{1}{\sin i\cos\theta},$$

ou encore

$$(10)\qquad \omega\frac{dt}{ds} = \frac{\sin(\Delta - \Delta')}{\gamma\cos\Delta'\sin i} = \left(\frac{1}{\gamma}\sin\Delta - \frac{1}{\gamma'}\sin\Delta'\right)\frac{1}{\sin i}.$$

Telle est la relation cherchée, dans laquelle on devra donner à Δ' le signe —, lorsque les deux courbes opposeront leurs convexités.

Remarque. — Si $\Delta = 90°$, on aura en général, d'après la formule (6), $\Delta' = 90°$, ou si la première courbe de roulement est une ligne géodésique du lieu géométrique correspondant des positions de l'axe instantané, l'autre courbe est aussi une ligne géodésique de l'autre lieu. D'où l'on déduit ce théorème :

Lorsque deux surfaces réglées roulent l'une sur l'autre en se raccordant, toute ligne géodésique de la première roule sur une ligne géodésique de la seconde.

116. *Propriétés communes aux deux groupes de surfaces passant respectivement par deux courbes données, suivant lesquelles toute surface du premier groupe roule sur une surface appartenant au deuxième.* — Les seules données de la question sont les angles i, Δ, Δ' et les rayons γ et γ'.

L'équation (1) donne en vertu des relations (8)

$$(\varepsilon)\qquad \frac{1}{\gamma}\frac{\sin(\Delta+\theta)\sin\beta_1}{\sin(\beta_1-\beta)}=\frac{1}{\gamma'}\frac{\sin(\Delta'+\theta)\sin\beta'_1}{\sin(\beta'_1-\beta)}$$

ou

$$\begin{aligned}&\cos\Delta'\sin(\Delta+\theta)\sin\beta_1\sin(\beta'_1-\beta)\\&=\cos\Delta\sin\Delta'\sin(\Delta'+\theta)\sin\beta'_1\sin(\beta_1-\beta).\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\beta_1-\beta=\pi,\quad \beta'_1-\beta'=\pi',$$

π et π' étant aussi les angles formés par abb_1 avec ses tangentes conjuguées sur les deux surfaces, il vient, en éliminant β_1, β'_1,

$$\begin{aligned}&\cot\pi\cos\Delta'\sin(\Delta+\theta)-\cot\pi'\cos\Delta\sin(\Delta'+\theta)\\&=-\cot\beta\cos\theta\sin(\Delta-\Delta'),\end{aligned}$$

et comme, des équations (λ) et (μ) du n° 111, p. 159, on tire

$$\cot\beta=\frac{\cot i}{\cos\theta},$$

il vient, pour la relation cherchée,

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}&\cot\pi\cos\Delta'\sin(\Delta+\theta)-\cot\pi'\cos\Delta\sin(\Delta'+\theta)\\&=-\cot i\sin(\Delta-\Delta').\end{aligned}\right.$$

Cas particulier. — Cette formule n'est pas applicable au

cas où $\Delta = 90^\circ$, $\Delta' = 90^\circ$, pour lequel les courbes de roulement sont des lignes géodésiques des lieux géométriques, roulant l'un sur l'autre, des axes instantanés. Ici γ et γ' sont arbitraires et il faut remonter à l'équation (ε) et y faire cette hypothèse; on obtient ainsi

$$\frac{1}{\gamma}(\cot\beta + \cot\pi) = \frac{1}{\gamma'}(\cot\beta + \cot\pi)$$

et enfin

$$\frac{1}{\gamma}\cot\pi - \frac{1}{\gamma'}\cot\pi' = -\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma'}\right)\frac{\cot i}{\cos\theta}.$$

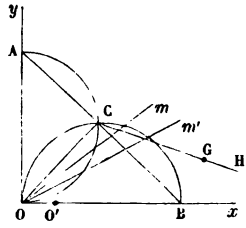
CHAPITRE QUATRIÈME.

DE L'ACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT DES SYSTÈMES INVARIABLES.

§ Ier. — De l'Accélération dans le Mouvement des Figures planes dans leur plan, ou des Systèmes invariables se mouvant parallèlement a un plan.

117. Soient O (*fig.* 53) le centre instantané de rotation de la figure plane à un instant quelconque; ω la vitesse angulaire correspondante dont nous supposerons le sens de la gauche vers la droite; O′ la position du centre instantané au bout du temps dt, et $\omega + d\omega$ la vitesse angulaire correspondante; m, m' les positions d'un point de la figure, contemporaine de O, O′; r la distance mO; $U = \frac{OO'}{dt}$ ce que nous pourrons appeler la *vitesse du centre instantané.*

Fig. 53.



La rotation $\omega + d\omega$, relative au point O′, peut être considérée comme se composant d'une rotation égale autour du point O et d'une translation $OO'.(\omega + d\omega) = U dt.\omega$, dont le sens et la direction s'obtiendront en supposant que la droite qui représente U tourne de 270° autour de O dans le sens de ω.

La vitesse $(\omega + d\omega).Om'$ n'est autre chose que celle que

possédérait le point m au bout du temps dt, s'il tournait effectivement autour du centre O supposé fixe, avec la vitesse variable ω; en d'autres termes, elle se compose de la vitesse $\omega . Om$ et des accélérations élémentaires $\omega^2 . Om . dt$, $Om \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot dt$ dirigées respectivement suivant mO et la vitesse $\omega . Om$.

Il résulte de là que l'accélération φ de m se compose des accélérations $\omega^2 r$, $r\frac{d\omega}{dt}$, ωU, dirigées respectivement, vers le point O, suivant ωr, et suivant la direction que prendrait U en tournant autour de O de 270° dans le sens de ω; en d'autres termes :

Dans le mouvement d'une figure plane dans son plan, l'accélération d'un point quelconque se compose de celle qui aurait lieu si la figure tournait effectivement autour de son centre instantané supposé fixe, avec sa vitesse angulaire instantanée variable, et d'une accélération représentée par la vitesse du centre instantané, que l'on aurait fait tourner de 270° dans le sens de la rotation, multipliée par cette même rotation.

118. *Projections sur deux axes rectangulaires de l'accélération d'un point de la figure.* —Nous prendrons, pour plus de simplicité, la direction Ox de U, et celle Oy de ωU pour axes coordonnés. Soient ε l'angle formé par Om avec Ox; x, y les coordonnées du point m; X, Y les composantes de l'accélération du point m parallèle aux axes; on a

$$x = r\cos\varepsilon, \quad y = r\sin\varepsilon,$$

puis

$$(1) \quad \begin{cases} X = -\omega^2 r\cos\varepsilon + r\dfrac{d\omega}{dt}\sin\varepsilon = -\omega^2 x + y\dfrac{d\omega}{dt}, \\ Y = -\omega^2 r\sin\varepsilon - r\dfrac{d\omega}{dt}\cos\varepsilon + \omega U = -\omega^2 y - x\dfrac{d\omega}{dt} + \omega U. \end{cases}$$

119. *Du centre des accélérations.* — En posant $X = 0$, $Y = 0$, on obtient les relations

$$y = \frac{\omega^2}{\frac{d\omega}{dt}} \cdot x,$$

$$y = -x\frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2} + \frac{U}{\omega},$$

qui représentent deux droites perpendiculaires entre elles; l'une passe par le centre instantané, l'autre coupe la direction de la vitesse de ce centre en un point B dont l'abscisse est

$$OB = U \cdot \frac{\omega}{\frac{d\omega}{dt}},$$

et celle de ωU ou de Oy en un point A dont l'ordonnée est

$$OA = \frac{U}{\omega}.$$

On voit ainsi que la projection C du centre instantané sur cette dernière droite est un point de la figure pour lequel l'accélération est nulle.

Donc, *dans le mouvement d'une figure plane dans son plan, il y a, à chaque instant, un point unique de cette figure dont l'accélération est nulle.*

Nous donnerons à ce point le nom de *centre des accélérations.*

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point C; en retranchant respectivement de la première et de la seconde des équations (1), les identités

$$-\omega^2 x_1 + y_1 \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$-\omega^2 y_1 - x_1 \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

il vient

$$X = -\omega^2(x - x_1) + (y - y_1)\frac{d\omega}{dt},$$

$$Y = -\omega^2(y - y_1) - (x - x_1)\frac{d\omega}{dt},$$

et ces deux composantes sont évidemment celles qui résulteraient de la rotation effective de la figure autour du point C, avec la vitesse angulaire variable ω.

Donc *l'accélération en chaque point de la figure est la même que si la vitesse et l'accélération angulaires avaient lieu effectivement autour du centre des accélérations.*

De plus, *l'accélération d'un point quelconque fait avec le rayon mené du centre des accélérations à ce point un angle dont la tangente trigonométrique est*

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{d\omega}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\omega}\right),$$

et qui, par conséquent, est la même pour tous les points de la figure.

Si la vitesse angulaire reste constante, le centre des accélérations se trouve en A ; on peut toujours supposer qu'il en est ainsi lorsqu'il s'agit de déplacements purement géométriques tels que ceux qui servent à définir la génération d'une courbe. C'est pourquoi nous donnerons au point A le nom de *centre géométrique des accélérations,* même lorsque la vitesse angulaire sera variable, en conservant au point C le nom de *centre des accélérations.*

Le point A jouit d'une propriété géométrique très-curieuse dont la découverte est due à M. Transon. Traçons en effet le cercle de centre A passant par le point O, et supposons constante la vitesse angulaire ; il est clair que l'accélération $\omega^2.Am$ du point m est celle qui résulterait du roulement du cercle ci-dessus sur la direction de U, en entraînant avec lui la figure invariable. On voit ainsi que la tangente et la courbure de la trajectoire d'un point de la

figure mobile peuvent se déduire de la considération du roulement d'un cercle sur une droite, qui détermine la cycloïde osculatrice de la courbe décrite. M. Transon a donné à ce cercle le nom de *cercle de roulement* (*).

Si l'on parvient à construire le centre géométrique A, ou $OA = \frac{U}{\omega}$, on trouvera le point B, par suite le point C, en remarquant que

$$OB = \frac{\omega U}{\frac{d\omega}{dt}} = \frac{\omega^2}{\frac{d\omega}{dt}} \cdot OA.$$

120. *De l'accélération normale.* — La composante normale φ_n de l'accélération φ de m est la somme des projections de X et Y sur Om, et l'on a

$$(2) \qquad \varphi_n = X \cdot \frac{x}{r} + Y \cdot \frac{y}{r} = -\frac{\omega^2 (x^2 + y^2)}{r} + \omega U \frac{y}{r},$$

ou

$$(3) \qquad \varphi_n = -\omega^2 r + \omega U . \sin \varepsilon.$$

L'accélération normale sera négative ou positive selon qu'elle sera dirigée vers le point O ou en sens inverse.

De la formule (3) on tire

$$(4) \qquad r + \frac{\varphi_n}{\omega^2} = \frac{U}{\omega} \sin \varepsilon.$$

Or $\frac{U}{\omega} \sin \varepsilon$ est la projection de OA sur r, $r + \frac{\varphi_n}{\omega^2}$ est la distance au point O de l'extrémité de la longueur égale à $\frac{\varphi_n}{\omega^2}$ comptée sur Om à partir du point m. On a donc ce théorème :

Si l'on porte à partir du point considéré, sur la droite qui le joint au centre instantané, et dans le sens de l'ac-

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. X, p. 154.

célération normale, une longueur égale au quotient de cette accélération par le carré de la vitesse angulaire, la perpendiculaire à l'extrémité de cette longueur passe par le centre géométrique des accélérations.

Il suffit donc de connaître l'accélération normale en deux points de la figure pour trouver le centre géométrique des accélérations, par suite la direction de U, et enfin le centre des accélérations si l'on se donne de plus l'accélération angulaire.

Le lieu géométrique des points pour lesquels l'accélération normale est nulle, est représentée par l'équation

$$\omega^2 (x^2 + y^2) - \omega U y = 0;$$

c'est donc le cercle décrit sur OA comme diamètre.

121. *De l'accélération tangentielle.* — L'accélération tangentielle φ_t est la somme des projections X et Y sur la perpendiculaire en m à Om, et l'on a

$$\varphi_t = X \cdot \frac{y}{r} - Y \cdot \frac{x}{r} = \frac{d\omega}{dt} \frac{(x^2 + y^2)}{r} - \omega U \frac{x}{r}$$

$$= r \frac{d\omega}{dt} - \omega U \cos \varepsilon = r \frac{d\omega}{dt} - \omega^2 OA \cos \varepsilon.$$

On voit ainsi que *la connaissance de l'accélération tangentielle en un point suffira pour déterminer* $\frac{d\omega}{dt}$, *tous les autres éléments étant supposés connus, et, en se reportant à ce qui précède, on reconnaît que pour trouver le centre des accélérations, il suffit de connaître l'accélération normale de deux points de la figure et l'accélération tangentielle de l'un d'eux* (*).

(*) *Réduction des forces d'inertie de la figure mobile.* — Soient (*fig.* 53) G le centre de gravité de la figure, H le point où CG est coupée par la direction de la résultante des forces d'inertie, M la masse, MR² le moment d'iner-

Le lieu des points pour lesquels l'accélération tangentielle est nulle, représentée par l'équation

$$(x^2+y^2)\frac{d\omega}{dt}-\omega Ux=0,$$

est le cercle décrit sur OB *comme diamètre.*

Ce cercle et celui qui est décrit sur OA comme diamètre passent par le point C, ce que l'on pouvait prévoir à priori.

Les formules qui donnent φ_n, φ_t ne sont pas applicables au point O de la figure dont la vitesse est nulle; c'est ce qui explique pourquoi les cercles ci-dessus passent par ce point, quoique son accélération ne soit pas nulle.

122. *Le rapport de la vitesse angulaire à la vitesse du centre instantané, est égal à la somme ou à la différence des inverses des rayons de courbure des lieux décrits par le centre instantané dans le plan fixe et le plan de la figure, selon que ces lieux opposent ou non leurs convexités.* — Soient Γ, Γ' les rayons de courbure de ces deux lieux en leur point de contact, correspondant aux angles de contingence $d\chi$, $d\chi'$.

---

tie par rapport à G, de la figure mobile, R étant ce que l'on nomme le *rayon de gyration* correspondant au point G. La résultante des forces d'inertie, la même que si toute la masse était concentrée en G, a pour composantes $M\omega^2.CG$ suivant CG et $M\frac{d\omega}{dt}\cdot CG$ perpendiculairement à cette direction. Si l'on remarque que, d'après une propriété connue, le moment d'inertie par rapport à C est $M(R^2+\overline{CG}^2)$, en prenant ce point pour centre des moments et égalant le moment de la résultante à la somme des moments des composantes relatives aux molécules qui constituent la figure, il vient

$$M\frac{d\omega}{dt}\cdot CG\times CH=M(R^2+\overline{CG}^2)\frac{d\omega}{dt},$$

d'où

$$GH=\frac{R^2}{CG},$$

ce qui détermine complétement la résultante des forces d'inertie. Ces considérations peuvent être utiles dans la théorie des machines.

Ces deux lieux roulant l'un sur l'autre, celui de la figure mobile tourne autour de leur point de contact, dans le temps dt, de l'espace angulaire $d\chi + d\chi'$ ou $d\chi - d\chi'$, selon que ces courbes opposent leurs convexités ou qu'elles sont intérieures l'une à l'autre; on a par suite

$$\omega\, dt = d\chi \pm d\chi',$$

et comme

$$\Gamma = \frac{d\chi}{U\,dt}, \quad \Gamma' = \frac{d\chi'}{U\,dt},$$

il vient

$$\frac{\omega}{U} = \frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'},$$

ce qui est conforme à l'énoncé.

On déduit de là

$$\frac{U}{\omega} = \frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma' \pm \Gamma},$$

et l'on reconnaît, par une construction simple, que *le second membre de cette égalité représente la portion de la tangente commune aux deux cercles osculateurs, en leur point de contact, limitée par le rayon mené du centre de l'un de ces cercles à l'extrémité du rayon de l'autre perpendiculaire à la ligne des centres.*

Si la courbe fixe se réduit à une droite, on a

$$\Gamma = \infty$$

et

$$\frac{U}{\omega} = \Gamma'.$$

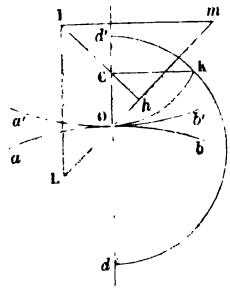
Donc, *lorsqu'une courbe roule sur une droite, son centre de courbure coïncide avec le centre géométrique des accélérations.*

123. *Construire le rayon de courbure de l'épicycloïde plane*, c'est-à-dire de la courbe décrite par un point déter-

miné du plan d'une courbe mobile qui roule sur une courbe fixe.

Supposons, par exemple, que les deux courbes opposent leur convexité (*fig.* 54), et que la rotation instantanée ω de la courbe mobile $a'b'$, autour de son point de contact O avec la courbe fixe ab, ait lieu de la gauche vers la droite, comme nous l'avons supposé jusqu'ici. Soient d', d les centres de courbure en O de $a'b'$, ab; K le point de rencontre de la circonférence décrite sur dd' comme diamètre avec le cercle osculateur en O à $a'b'$; C la projection de K sur $d'd$. On a, d'après une propriété connue du cercle,

Fig. 54.



$$d'C = \frac{\Gamma'^2}{\Gamma + \Gamma'} = \Gamma' - \frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma + \Gamma'} = \Gamma' - \frac{U}{\omega};$$

par suite C est le centre géométrique des accélérations.

Soient m le point décrivant, h la projection de C sur Om, ρ le rayon de courbure cherché; l'accélération normale de la trajectoire de m étant $\omega^2 \cdot \frac{Om^2}{\rho}$, on a, d'après le n° 120 ou la formule (4),

$$\frac{\overline{Om}^2}{\rho} = mh,$$

d'où

$$\rho = \frac{\overline{Om}^2}{mh}.$$

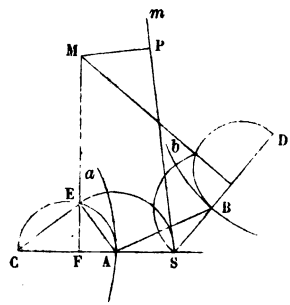
Soit I le point de rencontre de Ch, prolongée s'il le faut, avec la circonférence de centre m et de rayon Om; je joins mI et j'élève en I, à la droite mI, une perpendiculaire qui rencontre la direction de Om au point L; ce point, d'après la formule précédente, est le centre de courbure cherché.

Nous donnerons plus loin, comme cas particulier d'un

problème général, une construction un peu plus simple du rayon de courbure des épicycloïdes.

124. *Construire le rayon de courbure de la ligne décrite par un point d'une figure mobile dont deux points sont assujettis à parcourir deux courbes données.* — Soient A et B (*fig.* 55) les points de la figure assujettis à décrire les deux courbes données Aa, Bb; S le point de rencontre des normales en A et B, qui est le centre instantané de rotation; C et D les centres de courbure relatifs aux points A et B des lignes Aa, Bb: l'accélération normale en A est $\omega^2 \frac{\overline{AS}^2}{AC}$. Soient E l'un des points d'intersection de la circonférence décrite sur AC comme diamètre avec la circonférence de centre A et de rayon AS, F la projection de E sur CA. On a

Fig. 55.



$$AF = \frac{AS^2}{AC},$$

et la perpendiculaire en F à SA renferme le centre géométrique des accélérations (120). La même construction appliquée au point B achèvera de déterminer ce centre M.

Soient m le point qui décrit la courbe considérée, P la projection de M sur mS, ρ le rayon de courbure cherché. On a (120) de même que dans le problème précédent,

$$\rho = \frac{mS^2}{mP},$$

et une construction identique aux précédentes permet de déterminer le centre de courbure (*).

(*) Bobillier a donné, dans sa Géométrie, une construction différente de la précédente, et que M. Mannheim a reproduite dans un intéressant Mémoire inséré au XXXVIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

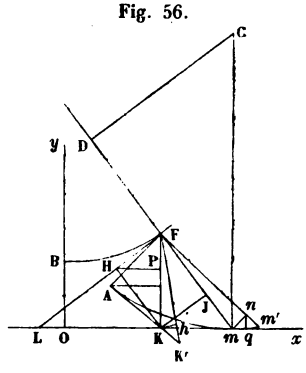
La méthode que l'on vient d'indiquer s'applique notamment à la détermination du rayon de courbure de la courbe à longue inflexion du parallélogramme de Watt, à l'ellipse décrite par un sommet d'un triangle dont deux autres sommets s'appuient sur deux droites, etc.

Il est bon de remarquer que *lorsque l'une des lignes directrices se réduit à une droite, l'accélération normale correspondante étant nulle, le centre des accélérations se trouve sur cette droite.*

125. *Des propriétés géométriques de la chaînette.* — La *chaînette* est la courbe qu'affecte librement un fil pesant dont les deux extrémités sont attachées à deux points fixes. Cette courbe est identique au lieu géométrique des positions du foyer d'une parabole qui roulerait sans glissement sur une droite fixe. Nous admettrons ce fait, et nous chercherons à déduire les propriétés géométriques de la chaînette, de ce mode de génération.

Soient (*fig.* 56) F le foyer de la parabole, $4a$ son paramètre, m son point de contact avec la droite fixe mx, ω la vitesse angulaire autour du centre instantané m; l'accélération normale de F est $\omega^2 \frac{\overline{Fm}^2}{\rho}$.

Fig. 56.



Dans le cas actuel (122) le centre de courbure C de la parabole est le centre des accélérations, et si D est la projection de C sur le prolongement de mF, l'accélération normale de F est ω^2.DF. Or on sait (50) que

$$DF = mF;$$

donc

$$\rho = mF.$$

En d'autres termes :

Dans la chaînette, le rayon de courbure est égal à la normale.

Soient A le sommet de la parabole; AK la tangente à ce sommet passant, comme on le sait, par le pied K de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente en m; Fm' le rayon vecteur faisant avec Fm l'angle ωdt; mn l'arc de cercle ayant F pour centre et Fm pour rayon, limité par Fm, Fm'; FK$'$ la perpendiculaire abaissée du foyer F sur la tangente en m'; Kh la perpendiculaire abaissée de K sur FK$'$. L'arc élémentaire décrit par F dans le temps dt est

$$\omega . dt . \mathrm{F}m = mn;$$

d'autre part, l'angle KFh est égal à l'angle mFm', cela résulte des égalités d'angles

$$\widehat{\mathrm{AFK}} = \widehat{\mathrm{KF}m}, \quad \widehat{\mathrm{AFK}'} = \widehat{\mathrm{K}'\mathrm{F}m'};$$

d'où l'on déduit, en égalant les mesures de ces angles,

$$mn = \frac{\mathrm{K}h.\mathrm{F}m}{\mathrm{FK}}.$$

Or l'angle hKK$'$ étant égal à AFK = KFm, comme ayant le côtés perpendiculaires, les triangles rectangles KFm, KhK$'$ sont semblables et donnent

$$\mathrm{K}h = \mathrm{KK}' \frac{\mathrm{FK}}{\mathrm{F}m},$$

d'où

$$mn = \mathrm{KK}'.$$

Soit KJ la perpendiculaire abaissée du point K sur Fm; on a, en se reportant aux propriétés de la parabole,

$$\mathrm{KJ} = \mathrm{AK}, \quad \mathrm{FJ} = \mathrm{AF} = a;$$

de sorte que l'accroissement élémentaire de l'arc est égal à l'accroissement correspondant de la perpendiculaire abaissée du pied K de l'ordonnée FK de la chaînette sur la nor-

male Fm. Si donc on compte l'arc à partir du *sommet* B ou du point le plus bas de la chaînette, point pour lequel le sommet de la parabole se trouve sur la droite fixe et la perpendiculaire KJ est nulle, on a

$$\mathrm{KJ} = \mathrm{arc\,BF},$$

ou, en abaissant du point K la perpendiculaire KH sur la tangente à la chaînette,

$$\mathrm{arc\,BF} = \mathrm{FH}.$$

Donc, *dans la chaînette, l'arc compté à partir du sommet est égal à la projection sur la tangente de l'ordonnée correspondant à l'autre extrémité de l'arc.*

Le point H appartient à la *développante* de la chaînette, courbe à laquelle on a donné le nom de *tractrice*.

Si l'on représente par s et y l'arc BF et l'ordonnée FK, en prenant pour origine des coordonnées la projection O de B sur mx, le triangle rectangle FKJ donne

$$s = \sqrt{y^2 - a^2} \quad (*).$$

Proposons-nous maintenant de déterminer l'aire de la chaînette limitée par deux ordonnées quelconques et la droite mx. L'aire élémentaire comprise entre FK et l'ordonnée infiniment voisine est égale au produit de FK par

---

(*) Il est facile de trouver l'équation de la chaînette. Remarquons en effet que

$$\mathrm{FH} = \mathrm{KH}\ \mathrm{tang\,HKF},$$

ou

$$\sqrt{y^2 - a^2} = a\frac{dy}{dx},$$

d'où

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = \frac{dx}{a}$$

et

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

la projection sur Kx de l'élément d'arc décrit par le point F ou par la projection mq de mn.

Or les deux triangles rectangles mnq, FKJ ayant quatre côtés perpendiculaires deux à deux donnent

$$mq = \frac{mn.\mathrm{FJ}}{\mathrm{FK}},$$

d'où

$$\mathrm{FK}.mq = mn.a.$$

Ainsi l'accroissement élémentaire de l'aire BOFK est proportionnel à l'accroissement correspondant de l'arc; d'où l'on déduit que cette aire est égale à as. Donc *l'aire de la chaînette comprise entre l'ordonnée du sommet et une autre ordonnée est égale au produit de la première ordonnée par l'arc intercepté.*

Nous terminerons en indiquant les deux propriétés géométriques principales de la *tractrice*.

Prolongeons HF jusqu'à sa rencontre L avec Ox; HL sera la normale N de cette courbe, et si l'on désigne par R son rayon de courbure FH, on a, dans le triangle rectangle FKL,

$$\mathrm{HK}^2 = \mathrm{HL} \times \mathrm{FH},$$

d'où

$$\mathrm{R} = \frac{a^2}{\mathrm{N}}.$$

Donc, *dans la tractrice le rayon de courbure varie en raison inverse de la normale.*

Soient P la projection de H sur FK, y' l'ordonnée KP du point H, y représentant toujours FK; le triangle FHK donne

$$y' = \frac{a^2}{y}.$$

D'ou il suit que la tractrice passe par le point B et qu'elle est asymptotique à Ox, puisque y croissant indéfiniment, y' a pour limite zéro.

Les projections de l'élément d'arc, décrit par H, sur Ox et Oy sont proportionnelles à nq et mq, puisque cet élément est semblable et perpendiculaire à mn; elles sont ainsi dans le rapport $\frac{Km}{FK}$, de sorte que l'aire élémentaire en H comprise entre deux ordonnées consécutives est égale à la longueur PK multipliée par le produit de l'accroissement de cette ordonnée par le rapport $\frac{Km}{FK}$. Les triangles semblables HPK, FKm donnent

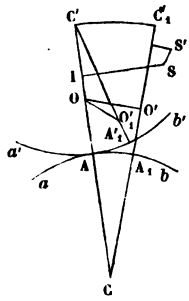
$$HP = \frac{PK.Km}{FK}.$$

Or HP, multiplié par l'accroissement élémentaire de PK, est évidemment égal à l'aire élémentaire du cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à HK $= a$, et comprise entre le diamètre Oy et deux parallèles consécutives à Ox. D'où il suit que l'*aire de la tractrice, limitée par deux ordonnées, est égale à celle que déterminent dans le quart du cercle d'un rayon égal au paramètre de la chaînette les abscisses correspondantes, et que l'aire indéfinie comprise entre* Oy, Ox *est équivalente à la surface du quart de cercle.*

126. *Lorsqu'une figure plane se meut de manière qu'une courbe tracée dans son plan mobile reste constamment tangente à une courbe fixe, la projection, sur la normale commune, du centre des accélérations est, en allant vers le centre de courbure de la courbe fixe, à une distance du centre de courbure de la courbe mobile égale à une troisième proportionnelle entre la distance de ce dernier point au centre instantané de rotation et celle des centres de courbure des deux courbes. — Si la courbe mobile se réduit à une droite, la projection ci-dessus du centre des accélérations est, en allant vers le centre instantané, à une distance du point de contact égale au double de la distance de ces deux points augmenté du rayon de courbure de la*

courbe fixe pris en sens inverse.—Supposons (*fig.* 57), pour fixer les idées, que la courbe fixe ab et la courbe mobile $a'b'$ opposent leurs convexités; soient A leur point de contact; C, C′ leurs centres de courbure respectifs; O le centre instantané de la figure mobile situé sur la normale commune CC′ aux deux courbes; A_1, A'_1 les points de ces courbes qui doivent se trouver en contact au bout du temps dt : on a

Fig. 57.



$$C'A'_1 = C'A, \quad CA = CA_1.$$

A la fin de l'intervalle dt, C′ vient se placer en C'_1 sur la direction de CA_1, et comme $CC'_1 = CC'$, C est le centre de courbure en C′ de la trajectoire décrite par ce point. L'accélération normale du point C′ étant $\omega^2 \cdot \frac{\overline{OC'}^2}{CC'}$, en portant $C'I = \frac{OC'^2}{CC'}$ de C′ vers A (120), la perpendiculaire en I à CC′ passera par le centre des accélérations.

Lorsque $a'b'$ se réduit à une droite, C′ se trouvant à l'infini, le raisonnement ci-dessus doit être modifié. Mais si l'on remarque que

$$AI = AC' - \frac{\overline{OC'}^2}{AC' + AC} = (AC' - OC')\frac{AC' + OC'}{AC' + AC} + \frac{AC.AC'}{AC + AC'}$$

$$= AO\left(\frac{2}{1 + \frac{AC}{AC'}}\right) + \frac{2AC}{1 + \frac{AC}{AC'}},$$

il vient, en supposant AC′ infini,

$$AI = 2OA + AC,$$

ce qui est conforme à la seconde partie de l'énoncé.

Remarque. — Le théorème ci-dessus subsiste encore lorsque la courbe ab se réduit à un point fixe; il suffit d'y supposer que C se confond avec A ou que $AC = 0$.

127. *Applications. — Construire le rayon de courbure :*

1° *De la conchoïde.* — Reportons-nous au n° 79 et à la *fig.* 22, p. 85. En portant sur la perpendiculaire OT à Oc, à partir du centre instantané T, TQ = OT, on obtient la projection Q sur cette droite (126), du centre des accélérations ; et comme ce même centre se trouve sur la droite directrice *ch* (124), il est complétement déterminé, et l'on construira le rayon de courbure en a, b, comme on l'a vu plus haut.

2° *De la cissoïde.* — La même construction s'applique à la cissoïde. Le centre des accélérations (même figure) s'obtient en portant, à partir du centre instantané S, SK = SO sur la perpendiculaire en O à Ob, et élevant à OK au point K une perpendiculaire dont le point de rencontre avec *ch* est le centre cherché.

3° *De la courbe engendrée par le sommet d'un angle constant dont les côtés restent tangents à une courbe fixe.* — Soient (*fig.* 23, p. 85) K et H les centres de courbure de la courbe fixe en a et c ; je porte à partir de O sur Oa et Oc des longueurs respectivement égales, mais de sens opposé, à OK, OH ; les points K_1, H_1, ainsi obtenus, sont les projections du centre des accélérations sur Oa et Oc ; car, par exemple,

$$aK_1 = aO - (aK - aO) = 2aO - aK.$$

Ce qui est conforme à la seconde partie de l'énoncé du numéro précédent. Le centre des accélérations étant construit, on en déduira sans peine le rayon de courbure du lieu décrit par le sommet m.

128. *Construction du centre des accélérations d'une bielle dont la manivelle est animée d'un mouvement de rotation uniforme.* — Reportons-nous au n° 81 et à la *fig.* 24, p. 86. La vitesse angulaire instantanée autour de S ayant pour valeur

$$\omega . \frac{OA}{AS},$$

la projection H du centre géométrique I des accélérations sur OA sera donnée par

$$OH = \frac{\omega^2 . OA}{\omega^2 . \frac{OA^2}{AS^2}} = \frac{AS^2}{OA},$$

expression qu'il est facile de construire ; et comme l'accélération normale est nulle en B, le centre géométrique I se trouve sur la direction de BO, et il est par suite complétement déterminé.

Connaissant le point I, et sachant que l'accélération tangentielle est nulle en A, l'application de la méthode indiquée au n° 121 permettrait de trouver le centre C des accélérations; mais il est plus simple d'opérer comme il suit. Le cercle décrit sur IS comme diamètre, lequel passe par les points H et B, contient le centre C, puisque c'est le lieu des points pour lesquels l'accélération normale est nulle. Or l'inclinaison de l'accélération de chaque point de la bielle sur le rayon correspondant partant de C est constant, de sorte que angle $\widehat{OAC} = \widehat{ABC}$, ou $\widehat{ACB} = \widehat{SAB}$. Le point C se trouve donc sur l'arc ou le segment capable de l'angle SAB décrit sur AB et le problème est résolu.

La même méthode de recherche est applicable au système du parallélogramme, manivelle, balancier et bielle des machines de Watt, à la coulisse Stephenson, etc.

§ II. — De l'Accélération dans le Mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe.

129. *L'accélération en tout point d'un système invariable mobile autour d'un point fixe se compose : 1° de l'accélération centripète relative à l'axe instantané; 2° de l'accélération due à l'accélération angulaire.* — Soient OA, OA′ deux positions consécutives de l'axe instantané passant par le point fixe O ; m, m' les positions correspon-

dantes d'un point du système ; r leur distance à OA ; ω, $\omega + d\omega$ les vitesses angulaires autour de OA, OA′; α l'accélération angulaire; p et $p + dp$ les distances de m, m' à la direction de cette accélération.

La rotation $\omega + d\omega$ autour de OA′ se compose de la rotation ω autour de OA et de la rotation $\alpha\, dt$; en d'autres termes, en négligeant les quantités du second ordre, la vitesse en m' est la résultante de ωr autour de OA et de $\alpha\,(p + dp)\,dt = \alpha\, p dt$. Or la composante ωr de la vitesse du point décrivant m' est, comme dans le mouvement circulaire uniforme, la résultante de la vitesse qu'il possédait en m, et de l'accélération élémentaire $\omega^2 r dt$, dirigée suivant r de m vers OA.

D'où il suit que l'accélération du point m se compose des deux accélérations $\omega^2 r$, αp; ce qui est conforme à l'énoncé.

Considérons maintenant un corps dans son mouvement le plus général et supposons qu'on lui imprime une vitesse et une accélération égales et contraires à celles de l'un de ses points O, de manière à réduire ce point au repos. Le système tournera alors autour du point O comme s'il était fixe. D'où l'on déduit que

L'accélération en chaque point d'un système invariable, dans son mouvement le plus général, se compose de l'accélération d'un autre point, de l'accélération centripète due à la rotation autour de l'axe instantané passant par ce dernier point et de l'accélération due à l'accélération angulaire.

130. *Projections sur trois axes rectangulaires fixes ou mobiles avec le système de l'accélération d'un point quelconque de ce système, supposé mobile autour de l'origine des coordonnées.* — Continuons à représenter par n, p, q les composantes de la rotation instantanée suivant les axes Ox, Oy, Oz, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ étant les composantes correspon-

dantes de l'accélération angulaire. Soient x, y, z les coordonnées du point considéré. Nous avons déjà trouvé pour les composantes relatives à l'accélération angulaire (95)

$$z\frac{dp}{dt} - y\frac{dq}{dt} \text{ suivant } Ox,$$

$$x\frac{dq}{dt} - z\frac{dn}{dt} \text{ suivant } Oy,$$

$$y\frac{dn}{dt} - x\frac{dp}{dt} \text{ suivant } Oz.$$

Il nous reste à obtenir les composantes de l'accélération centripète. Soient, à cet effet (*fig.* 34, p. 111) mp la perpendiculaire abaissée du point m sur l'axe instantané de rotation, α, β, γ les angles formés par Op avec Ox, Oy, Oz. On a

$$\cos\alpha = \frac{n}{\omega}, \quad \cos\beta = \frac{p}{\omega}, \quad \cos\gamma = \frac{q}{\omega},$$

et, d'après un théorème connu,

$$Op = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma.$$

La projection de l'accélération centripète $\omega^2 mp$ sur Ox est, par suite,

$$\begin{aligned}\omega^2[(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\cos\alpha - x] &= n^2x + npy + nqz - \omega^2 x \\ &= -(p^2+q^2)x + npy + nqz.\end{aligned}$$

Appelant Φ_x, Φ_y, Φ_z les projections de l'accélération totale Φ du point m sur les axes Ox, Oy, Oz, il vient

$$\Phi_x = z\frac{dp}{dt} - y\frac{dq}{dt} - (p^2+q^2)x + npy + nqz,$$

et par analogie

$$\Phi_y = x\frac{dq}{dt} - z\frac{dn}{dt} - (q^2+n^2)y + pqz + pnx,$$

$$\Phi_z = y\frac{dn}{dt} - x\frac{dp}{dt} - (n^2+p^2)z + qnx + qpy.$$

On trouverait facilement, en partant de là, les accélérations normale et tangentielle; mais les formules auxquelles on serait conduit ne devant nous être d'aucune utilité, nous ne nous y arrêterons pas.

131. *Projections sur trois axes rectangulaires mobiles avec le système de l'accélération, d'un point quelconque de ce système, quelle que soit d'ailleurs la nature de son mouvement.* — Pour avoir ces projections, il suffit d'introduire respectivement dans les seconds membres des formules précédentes, les composantes Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z de l'accélération Ψ de l'origine des coordonnées.

Mais en général Ψ sera donné par ses projections Ψ_X, Ψ_Y, Ψ_Z sur trois axes de directions fixes OX, OY, OZ, et pour avoir les expressions de Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z, il faudra avoir recours aux formules de transformation (1) du n° 93 :

$$\Psi_x = \Psi_X(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) + \Psi_Y(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\varphi\cos\theta) + \Psi_Z\sin\theta\sin\psi,$$

$$\Psi_y = \Psi_X(\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + \Psi_Y(\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) + \Psi_Z\sin\theta\cos\psi,$$

$$\Psi_z = \Psi_X\sin\varphi\sin\theta - \Psi_Y\cos\varphi\sin\theta + \Psi_Z\cos\theta.$$

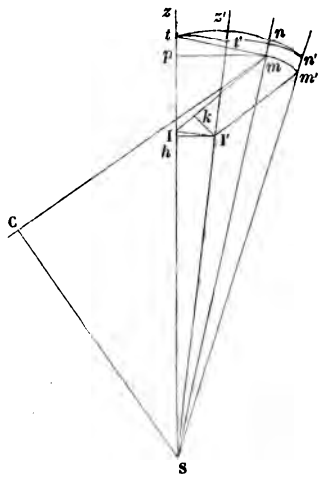
Il ne faudra pas perdre de vue que n, p, q sont des fonctions de φ, ψ, θ, t, déterminées par les formules (3) du n° 98 (*).

132. *Rayon de courbure de l'épicycloïde sphérique.* — On sait que l'épicycloïde sphérique est la courbe décrite par un point relié invariablement à un cône de révolution qui roule sur un autre cône de révolution de même sommet.

(*) *Voyez* la Note I placée à la fin du volume, relative à l'application des formules établies dans ce numéro et les précédents, au problème de la rotation des corps.

Soient (*fig.* 58) S le sommet des cônes, Sz leur arête de contact à l'instant considéré, Sz' l'arête suivant laquelle a lieu le contact au bout du temps dt, en supposant ainsi que la rotation instantanée ω a lieu de la droite vers la gauche pour l'observateur couché suivant Sz en ayant les pieds en S; m le point décrivant, S$m = i$ le rayon de la sphère sur laquelle ce point trace l'épicycloïde, γ l'angle formé par le rayon Sm avec Sz, ε l'angle d'inclinaison du plan zSm, normal à la courbe, sur le plan normal aux cônes suivant Sz.

Fig. 58.



Comme on peut supposer que la rotation instantanée ω est constante, l'accélération angulaire α est perpendiculaire à Sz, et l'angle $z\mathrm{S}z' = d\psi$ est mesuré par $\frac{\alpha dt}{\omega}$.

L'accélération angulaire α se décompose en deux autres : l'une $\alpha \sin\varepsilon$ parallèle à la perpendiculaire mp abaissée du point m sur Sz, l'autre $\alpha\cos\varepsilon$ perpendiculaire au plan zSm. Elles donnent respectivement les accélérations

$$-\alpha\sin\varepsilon.\mathrm{S}p = -\alpha i\cos\gamma\sin\varepsilon, \quad \alpha i\cos\varepsilon,$$

dirigées, la première, mesurant l'accélération tangentielle, suivant la vitesse ωr du point m, et la seconde dans le plan Szm. Cette dernière a pour composantes

$$\mathrm{Z} = -\alpha i\cos\varepsilon\sin\gamma \quad \text{suivant } \mathrm{S}z,$$
$$-\alpha i\cos\varepsilon\cos\gamma \quad \text{suivant } mp.$$

La composante totale de l'accélération suivant mp est donc

$$\mathrm{S} = \omega^2 mp - \alpha i\cos\varepsilon\cos\gamma = \omega^2 i\sin\gamma - \alpha i\cos\varepsilon\cos\gamma,$$

et la résultante de S et de Z sera l'accélération normale du point m.

Si donc on appelle ρ le rayon de courbure de l'épicycloïde, δ l'angle que forme sa direction mI avec Sz, on a

$$\rho = \frac{\omega^2 i^2 \sin^2\gamma}{\sqrt{\sin^2\gamma + \frac{\alpha^2}{\omega^4}\cos^2\varepsilon - 2\frac{\alpha}{\omega^2}\cos\varepsilon.\sin\gamma\cos\gamma}},$$

$$\operatorname{tang}\delta = -\frac{\frac{\alpha}{\omega^2}\sin\varepsilon\cos\gamma - \sin\gamma}{\frac{\alpha}{\omega^2}\cos\varepsilon\sin\gamma} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\omega^2}\cos\varepsilon} - \cot\gamma.$$

Il suffit d'ailleurs de connaître la direction de mI pour déterminer ρ, puisque, d'après le théorème de Meunier, le centre de courbure est la projection de S sur la direction de mI. Ainsi le tout se réduit à construire l'angle δ et à trouver une interprétation géométrique de $\frac{\alpha}{\omega^2}$.

Soient Γ, Γ' les rayons de courbure principaux des cônes au point p; $d\chi$, $d\chi'$ les angles formés par deux plans tangents consécutifs aux mêmes surfaces. On a, selon que les deux cônes sont extérieurs ou intérieurs l'un à l'autre,

$$\omega\, dt = d\chi \pm d\chi';$$

d'ailleurs

$$\alpha\, dt = \omega\, d\psi, \quad \Gamma = \frac{Sp.d\psi}{d\chi}, \quad \Gamma' = \frac{Sp.d\psi}{d\chi'},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\alpha}{\omega^2} = \frac{\Gamma\Gamma'}{Sp\,(\Gamma \pm \Gamma')}.$$

Or $\frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma \pm \Gamma'}$ représente la portion de la tangente commune aux deux cercles osculateurs de rayons Γ, Γ', déterminée par la droite qui joint le centre de l'un d'eux à l'extrémité du rayon de l'autre mené perpendiculairement à la ligne

des centres; par suite $\frac{\alpha}{\omega^2}$ est la tangente trigonométrique de l'angle η formé par Sz avec la droite qui joint le sommet des cônes à l'extrémité ci-dessus de la tangente. Cet angle étant supposé construit, il vient

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\cos\eta}{\cot\varepsilon} - \cot\gamma,$$

formule qui permettra de tracer graphiquement la direction de $m\mathrm{I}$.

§ III. — De l'Accélération dans le Mouvement le plus général d'un système invariable (*).

133. Nous avons trouvé au n° 129 l'expression de l'accélération d'un point quelconque du système, en fonction de l'accélération d'un autre point déterminé de ce système. Cette expression, qu'il est indispensable de connaître dans l'étude de la mécanique, ne permet cependant pas d'étudier toutes les propriétés géométriques du mouvement et de retomber comme cas particulier sur les théorèmes démontrés relatifs au mouvement d'une figure plane dans son plan. C'est pourquoi nous allons chercher à mettre l'accélération sous une autre forme, en n'y faisant entrer que les éléments relatifs à l'axe instantané de rotation et de glissement.

Nous appellerons *vitesse orthogonale* de l'axe instantané de rotation et de glissement, la plus courte distance entre deux positions consécutives de cet axe, rapportée à l'unité de temps.

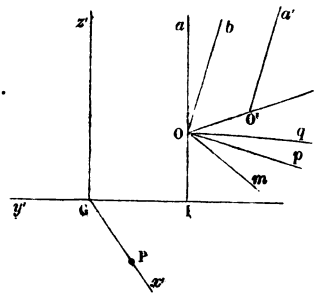
L'*accélération de glissement* sera pour nous l'accélération relative à la translation parallèle à l'axe ci-dessus.

(*) *Voyez* mon Mémoire sur le mouvement le plus général d'un corps solide, inséré au XXXVIIe cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

Enfin il nous arrivera, pour abréger le langage, d'appeler *axe des vitesses* l'axe instantané de rotation et de glissement.

134. *Expression de l'accélération.* — Soient (*fig.* 59) Oa, O$'a'$ deux positions consécutives de l'axe instantané de rotation et de glissement; OO$'$ leur plus courte distance dont la position, dans le cas du parallélisme, peut être choisie arbitrairement; $U = \frac{OO'}{dt}$ la vitesse orthogonale de l'axe; ω, $\omega + d\omega$ les vitesses angulaires instantanées autour de Oa et O$'a'$, dont nous supposerons le sens de la gauche vers la droite, pour l'observateur placé suivant Oa, O$'a'$, en ayant les pieds en O et O$'$; Q, Q$'$ les vitesses de glissement consécutives suivant Oa, O$'a'$; α et u les accélérations angulaire et de glissement.

Fig. 59.



Par le point O menons Ob parallèle à O$'a'$. La rotation $\omega + d\omega$ autour de O$'a'$ peut être considérée comme la résultante d'une rotation égale autour de Ob, et d'une translation suivant la perpendiculaire Om au plan a'OO$'$, représentée par $(\omega + d\omega)\,OO' = U\omega\,dt$ en négligeant les termes du second ordre. La position de Om sera déterminée en supposant que l'on fasse tourner OO$'$ ou U de 270° autour de Oa dans le sens de ω; Om est d'ailleurs parallèle à l'intersection du plan aOb avec tout plan perpendiculaire à Oa.

La rotation $(\omega + d\omega)$ autour de Ob se compose de la rotation ω autour de Oa, et de la rotation $\alpha\,dt$ autour d'une droite Op de position déterminée.

Enfin la translation Q$'$ suivant O$'a'$ se compose de la

translation Q parallèle à Oa et de la translation udt parallèle à Oq.

Soient M, M′ les positions d'un point du système, correspondant à celles Oa, O′a' de l'axe instantané de rotation et de glissement; r la distance de M, M′ à Oa; p, $p+dp$ les distances de ces mêmes points à l'axe de l'accélération angulaire. Il résulte de ce qui précède, et en négligeant les termes du second ordre, que la vitesse de M′ est la résultante de ωr, $\alpha(p+dp)dt = \alpha p dt$, $U\omega dt$, U, udt; or si l'on considère M, M′ en projection sur un plan perpendiculaire à Oa, on voit que la vitesse ωr de M′ est celle que posséderait au second instant le point M s'il tournait effectivement avec la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oa supposé fixe; d'où il suit que la vitesse ωr de M′ se compose de celle ωr de M et de l'accélération élémentaire $\omega^2 r dt$ dirigée suivant r, de M vers Oa.

L'accélération totale de M entraîné dans le mouvement a donc pour expression la somme géométrique

$$\overline{\omega^2 r} + \overline{p\alpha} + \overline{u} + \overline{\omega U},$$

ce qui donne lieu au théorème suivant :

L'accélération de tout point d'un système invariable mobile d'une manière quelconque se compose : 1° de l'accélération centripète relative à l'axe instantané et à la vitesse angulaire correspondante; 2° de l'accélération due à l'accélération angulaire, autour du point où cet axe est coupé par sa plus courte distance à sa position infiniment voisine; 3° de l'accélération de glissement; 4° d'une accélération égale au produit de la rotation instantanée par la vitesse orthogonale, et dont la position s'obtient en supposant que cette vitesse tourne de 270° autour de l'axe instantané, dans le sens de la vitesse angulaire correspondante.

Cet énoncé comprend évidemment, comme cas particuliers, ceux des n°s 117 et 129.

135. *Du centre des accélérations.* — Je prendrai pour origine de trois axes coordonnés le point O (*fig.* 59), pour axes des z la droite Oa; je supposerai les axes des x et des y perpendiculaires entre eux et à l'axe Oz, en laissant pour le moment la direction de l'un d'eux tout à fait arbitraire.

Soient

λ, μ, ν les composantes relatives aux axes Ox, Oy, Oz de la rotation α du système autour de la droite Op;

m, n, p les composantes de l'accélération de glissement estimées suivant les mêmes axes;

δ l'angle formé par O$m = \omega$U, ou par la résultante de λ et μ, ou par celle de m et n avec l'axe Ox;

Q la vitesse de glissement;

$d\psi = a$Ob l'angle formé de deux positions consécutives de l'axe de glissement.

En remarquant que les composantes de α et u, perpendiculaires à Oz, toutes deux situées dans le plan aOb, ont respectivement pour valeurs $\omega\frac{d\psi}{dt}$, Q$\frac{d\psi}{dt}$, il vient

$$\nu = \frac{d\omega}{dt},$$

$$\lambda = \omega\frac{d\psi}{dt}\cos\delta,$$

$$\mu = \omega\cdot\frac{d\psi}{dt}\sin\delta,$$

$$p = \frac{dQ}{dt},$$

$$m = Q\cdot\frac{d\psi}{dt}\cos\delta = Q\cdot\frac{\lambda}{\omega},$$

$$n = Q\cdot\frac{d\psi}{dt}\sin\delta = Q\cdot\frac{\mu}{\omega},$$

$$\sin\delta = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}, \quad \cos\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}.$$

Si l'on considère ω, λ, μ et Q, comme des données de la question, ν, p, m, n, δ se déduiront des formules précédentes et ne pourront pas être supposés arbitraires.

Dans le cas où λ et μ, par suite m et n, seraient nuls, c'est-à-dire où deux axes instantanés consécutifs seraient parallèles, l'angle δ n'en serait pas moins bien défini, et représenterait le complément de l'angle formé par la vitesse orthogonale avec l'axe Ox.

Nous allons chercher si, à chaque instant, il n'existe pas dans le système un ou plusieurs points pour lesquels l'accélération serait nulle. Il suffit d'exprimer pour cela que la somme des projections des composantes de l'accélération sur chaque axe est nulle. On trouve facilement

$$(1)\qquad \begin{cases} \lambda y - \mu x + p = 0, \\ \mu z - \nu y + m + \omega U \cos\delta - \omega^2 x = 0, \\ \nu x - \lambda z + n + \omega U \sin\delta - \omega^2 y = 0, \end{cases}$$

équations qui représentent trois plans; il y aura donc en général un *centre* et un seul *centre des accélérations;* dans quelques cas il pourra y avoir un *axe* des accélérations : c'est ce que nous examinerons un peu plus loin.

Des deux dernières équations on déduit

$$x = \frac{z(\mu\omega^2 + \lambda\nu) + m\omega^2 - n\nu + \omega U(\omega^2 \cos\delta - \nu \sin\delta)}{\omega^4 + \nu^2},$$

$$y = \frac{z[\omega^2\lambda + \mu\nu) + n\omega^2 + m\nu + \omega U(\omega^2 \sin\delta + \nu \cos\delta)}{\omega^4 + \nu^2}.$$

Portant ces valeurs dans la première équation, on trouve, en ayant égard aux valeurs de $\sin\delta$ et $\cos\delta$,

$$(2)\qquad \begin{cases} z = \dfrac{m(-\omega^2\mu + \lambda\nu) + n(\omega^2\lambda + \mu\nu) + p(\omega^4 + \nu^2) + \omega U\nu\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\omega^2(\lambda^2 + \mu^2)}, \\ \text{ou, eu égard à la valeur de } n, \\ z = \dfrac{m\nu\left(\dfrac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda}\right) + p(\omega^4 + \nu^2) + \omega U\nu\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}{\omega^2(\lambda^2 + \mu^2)}, \end{cases}$$

enfin

$$(3)\quad \begin{cases} x = \dfrac{m(\lambda^2+\mu^2)+p(\omega^2\mu+\lambda\nu)+\omega U\lambda\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{\omega^2(\lambda^2+\mu^2)}, \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{m}{\omega^2}+p\left(\dfrac{\sin\delta+\dfrac{\nu}{\omega^2}\cos\delta}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\right)+\dfrac{U}{\omega}\cos\delta, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} y = \dfrac{\dfrac{\mu}{\lambda}m(\lambda^2+\mu^2)+p(-\omega^2\lambda+\mu\nu)+\omega U\mu\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{\omega^2(\lambda^2+\mu^2)}, \\ \text{ou} \\ y = \dfrac{m}{\omega^2}\operatorname{tang}\delta+p\left(\dfrac{-\cos\delta+\dfrac{\nu}{\omega^2}\sin\delta}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\right)+\dfrac{U}{\omega}\sin\delta. \end{cases}$$

136. Le rapport $\frac{U}{\omega}$, de la vitesse orthogonale à la vitesse angulaire, qui entre dans ces formules joue un rôle important dans la partie de la cinématique qui nous occupe. Il est d'ailleurs susceptible d'une interprétation géométrique curieuse qu'il convient de faire connaître immédiatement. Soient $d\chi$, $d\chi'$ les angles de contingence des sections normales à la génératrice de contact, au point où elles se touchent, des lieux roulant et glissant l'un sur l'autre, des axes instantanés dans l'espace et dans le milieu supposé entraîné dans le mouvement du système invariable, ces sections étant menées suivant la plus courte distance entre deux génératrices consécutives; $\Gamma = \frac{U\,dt}{d\chi}$, $\Gamma' = \frac{U\,dt}{d\chi'}$ les rayons de courbure de ces sections : on a

$$\omega\,dt = d\chi \pm d\chi',$$

selon que ces sections s'opposent ou non leurs convexités;

d'où

$$\frac{\omega}{U} = \frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'} \quad \text{et} \quad \frac{U}{\omega} = \frac{1}{\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'}},$$

résultat que l'on formulera facilement en langage ordinaire.

Dans le cas d'une figure plane mobile dans son plan, Γ et Γ' sont les rayons de courbure des lieux des centres instantanés sur le plan considéré comme fixe et sur le plan mobile de la figure, ce qui est conforme au résultat obtenu au n° 122.

Revenons maintenant aux formules (1), (2), (3), (4). Les trois dernières montrent qu'il y aura un centre unique des accélérations, lorsque ω et l'une des quantités λ, μ ne seront pas nulles.

Dans le cas contraire, ou ce centre n'existera pas, ou il y en aura une infinité.

Supposons d'abord que la rotation ω seule soit nulle; dans ce cas il n'y a plus, à proprement parler, d'axe instantané, puisque le mouvement se réduit momentanément à une simple translation. On ne doit considérer alors que la droite limite vers laquelle tend la position de cet axe lorsque ω s'approche de zéro, droite dont la direction est parallèle à celle de l'accélération angulaire. L'accélération élémentaire en chaque point du système résulte ainsi d'une rotation et d'une translation ayant pour composantes m, n, p; ce qui conduit à un axe de rotation et de glissement pour les accélérations, et l'on voit qu'il n'y a aucun point sans accélération, à moins que la translation p suivant l'axe soit nulle, et alors tous les points de cet axe sont sans accélération. C'est ce que montrent d'ailleurs les équations (1) qui donnent, en y supposant $\omega = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$,

$$p = 0,$$
$$\nu y - m = 0,$$
$$\nu x + n = 0.$$

Admettons maintenant que, ω étant différent de zéro, on ait en même temps

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0,$$

ou que, pendant deux instants consécutifs, l'axe instantané conserve la même direction ; on a

$$m = 0, \quad n = 0, \quad \nu = \frac{d\omega}{dt},$$

et les équations (1) deviennent

$$\begin{aligned} p &= 0, \\ -\nu y + \omega U \cos\delta - \omega^2 x &= 0, \\ \nu x + \omega U \sin\delta - \omega^2 y &= 0. \end{aligned}$$

De ces équations on tire

$$\begin{aligned} y &= \frac{\omega U}{\omega^4 + \nu^2}(\nu \cos\delta + \omega^2 \sin\delta), \\ x &= \frac{\omega U}{\omega^4 + \nu^2}(-\nu \sin\delta + \omega^2 \cos\delta). \end{aligned}$$

Il y a donc un axe des accélérations parallèle à l'axe instantané, si toutefois l'accélération de glissement est nulle. Dans le cas contraire, il n'y a ni centre ni axe instantané des accélérations.

Si le système est assujetti à tourner autour d'un point fixe, on a

$$U = 0, \quad m = 0, \quad n = 0, \quad p = 0,$$

et les équations (1) se réduisent à

$$\begin{aligned} \lambda y - \mu x &= 0, \\ \mu z - \nu y - \omega^2 x &= 0, \\ \nu x - \lambda z - \omega^2 y &= 0. \end{aligned}$$

On reconnait facilement que si λ, μ et ω sont différents de zéro, ces équations ne sont vérifiées que par $x = 0$,

$y = 0$, $z = 0$, et le point fixe est seul sans accélération.

Dans le cas où $\omega = 0$, ces équations se réduisent à la première qui représente l'axe de l'accélération angulaire.

Enfin lorsque $\lambda = 0$, $\mu = 0$, les mêmes équations représentent l'axe instantané.

Une figure sphérique qui se meut sur sa sphère pouvant être considérée comme appartenant à un système invariable mobile autour du centre de la sphère supposé fixe, on voit qu'une pareille figure n'aura généralement pas de *pôle des accélérations*, c'est-à-dire de point sans accélération. Ce pôle n'existera que dans le cas d'une vitesse angulaire nulle ou d'une rotation continue autour d'un même axe ou d'un même pôle pendant deux instants consécutifs.

137. *L'accélération en chaque point du système est la même que si la rotation instantanée et l'accélération angulaire avaient lieu autour du centre instantané des accélérations ou d'un point quelconque de l'axe des accélérations s'il y en a un.* — En effet, soient X, Y, Z les composantes de l'accélération parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, égales respectivement au premier membre de la seconde, de la troisième et de la première des équations (1), on a

$$\lambda y - \mu x + p = Z,$$

$$\mu z - \nu y + m + \omega U \cos\delta - \omega^2 x = X,$$

$$\nu x - \lambda z + n + \omega U \sin\delta - \omega^2 y = Y.$$

J'appelle a, b, c, les trois coordonnées du centre des accélérations; ξ, ζ, η les coordonnées du point (x, y, z), par rapport aux axes coordonnés supposés transportés parallèlement à eux-mêmes à ce centre; on a

$$x = \xi + a, \quad y = \zeta + b, \quad z = \eta + c;$$

substituant ces valeurs dans les équations ci-dessus, et re-

marquant que

$$\lambda b - \mu a + p = 0,$$
$$\mu c - \nu b + m + \omega U \cos\delta - \omega^2 a = 0,$$
$$\nu a - \lambda c + n + \omega U \sin\delta - \omega^2 b = 0,$$

il vient

$$\lambda\zeta - \mu\xi = Z,$$
$$\mu\eta - \nu\zeta - \omega^2\xi = X,$$
$$\nu\xi - \lambda\eta - \omega^2\zeta = Y,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

On aurait pu arriver à ce résultat sans calcul, en supposant que l'on imprime à tout le système une translation dont la vitesse soit égale et parallèle à la vitesse de grandeur et de direction constantes que possède le centre des accélérations pendant deux éléments consécutifs du temps, ce qui ne change rien à l'accélération de chaque point du système. Mais il est clair que le mouvement autour de ce centre se réduit à la rotation ω autour d'un axe parallèle à celui des vitesses, et à l'accélération angulaire α transportée parallèlement à elle-même en ce point, et l'on est ainsi conduit aux conclusions précédentes.

138. *Accélération normale à la trajectoire d'un point du système.* — Choisissons pour plus de simplicité l'axe des x suivant la direction de la vitesse orthogonale. On a

$$\delta = 90^\circ, \quad \lambda = 0, \quad m = 0,$$

et en appelant X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de l'accélération totale, les formules (1) qui expriment qu'elles sont nulles donnent

$$(5) \qquad \begin{cases} Z = p - \mu x, \\ X = \mu z - \nu y - \omega^2 x, \\ Y = \nu x + n + \omega U - \omega^2 y. \end{cases}$$

Appelant r la distance $\sqrt{x^2+y^2}$ d'un point du système à l'axe instantané des vitesses, il vient, en désignant toujours par Q la vitesse de glissement et en nommant a l'angle que forme ωr avec la vitesse V de ce point,

$$\operatorname{tang} a = \frac{Q}{\omega r}, \quad \cos a = \frac{\omega r}{\sqrt{\omega^2 r^2 + Q^2}}, \quad \sin a = \frac{Q}{\sqrt{\omega^2 r^2 + Q^2}}.$$

Les accélérations X et Y donnent, suivant r, la composante

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} S = X\frac{x}{r} + Y\frac{y}{r} &= \frac{-\omega^2 r^2 + (n+\omega U)y + \mu z x}{r} \\ &= \frac{-\omega^2(x^2+y^2) + (n+\omega U)y + \mu^2 x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{aligned} \right.$$

et l'accélération Z donne perpendiculairement à la vitesse V et par suite à S, la composante

$$(7) \qquad Z\cos a = (p - \mu x)\frac{\omega r}{\sqrt{\omega^2 r^2 + Q^2}}.$$

Il vient ainsi pour la résultante de ces deux composantes, c'est-à-dire pour l'accélération normale φ_n, en posant $\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{y}{x}$ et appelant ρ le rayon de courbure de la trajectoire,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_n = \sqrt{\frac{(p-\mu r\cos\varepsilon)^2\omega^2 r^2}{\omega^2 r^2 + Q^2} + [-\omega^2 r + (n+\omega U)\sin\varepsilon + \mu z\cos\varepsilon]^2} = \frac{\omega^2 r^2 + Q^2}{\rho}, \\ &\text{d'où} \\ &\rho = \frac{\omega^2 r^2 + Q^2}{\sqrt{\frac{(p-\mu r\cos\varepsilon)^2\omega^2 r^2}{\omega^2 r^2 + Q^2} + [-\omega^2 r + (n+\omega U)\sin\varepsilon + \mu z\cos\varepsilon]^2}}. \end{aligned} \right.$$

La dernière de ces expressions se présente sous une forme indéterminée pour les points de l'axe instantané des vi-

tesses; mais pour avoir la valeur de ρ dans ce cas, on remarquera que φ_n est la résultante de X et Y pour $x = 0$, $y = 0$, ou $\sqrt{\mu^2 z^2 + (n + \omega U)^2}$, d'où

$$\rho = \frac{Q^2}{\sqrt{\mu^3 z^2 + (n + \omega U)^2}},$$

et l'on voit que s'il n'y a pas glissement, le rayon de courbure sera généralement nul pour les points de l'axe instantané.

En supposant dans les formules

$$p = 0, \quad n = 0, \quad Q = 0, \quad \mu = 0,$$

ou

$$Q = 0, \quad p = 0, \quad n = 0, \quad U = 0,$$

on retombe sur celles que nous avons établies directement pour les cas d'une figure plane et d'un point fixe.

139. *Angles du rayon de courbure avec les trois axes coordonnés.* — L'accélération $Z \cos a$ donne les composantes $Z \cos^2 a$ parallèle à l'axe OZ et $Z \sin a \cos a$ perpendiculaire à OZ et à r. Cette dernière se décompose elle-même en deux autres, l'une $-Z \sin a \cos a \sin \varepsilon$ suivant Ox, l'autre $Z \sin a \cos a \cos \varepsilon$ suivant Oy. On a donc pour les cosinus des angles cherchés

$$\cos(\rho, x) = \frac{S \cos \varepsilon - Z \sin a \cos a \sin \varepsilon}{\varphi_n},$$

$$\cos(\rho, y) = \frac{S \sin \varepsilon + Z \sin a \cos a \cos \varepsilon}{\varphi_n},$$

$$\cos(\rho, z) = \frac{Z \sin a \cos a}{\varphi_n},$$

formules dans lesquelles on verra remplacer $\sin a$, $\cos a$, S, Z, φ_n par leurs valeurs ci-dessus.

140. *Du plan osculateur.* — Le plan osculateur est déterminé par la direction du rayon de courbure ρ et celle de la vitesse $V = \sqrt{Q^2 + \omega^2 r^2}$ qui fait avec les axes coordonnés les angles donnés par les formules

$$\cos(V, x) = \frac{\omega r \sin \varepsilon}{\sqrt{\omega^2 r^2 + Q^2}},$$

$$\cos(V, y) = \frac{-\omega r \cos \varepsilon}{\sqrt{\omega^2 r^2 + Q^2}},$$

$$\cos(V, z) = \frac{Q}{\sqrt{\omega^2 r^2 + Q^2}}.$$

Le plan osculateur sera donc parallèle au plan représenté par l'équation

$$\begin{aligned} & x[\cos(V, y)\cos(\rho, z) - \cos(\rho, y)\cos(V, z)] \\ + & y[\cos(\rho, x)\cos(V, z) - \cos(V, x)\cos(\rho, z)] \\ + & z[\cos(\rho, y)\cos(V, x) - \cos(\rho, x)\cos(V, y)] = 0. \end{aligned}$$

141. *Lieu géométrique des points pour lesquels l'accélération normale est nulle, ou pour lesquels le rayon de courbure de la trajectoire est infini.*

Cette condition s'exprimera en posant :

1° $Z \cos a = 0$ ou tout simplement

$$p - \mu x = 0, \tag{9}$$

attendu que $\frac{\omega r}{\sqrt{\omega^2 r^2 + Q^2}} = 0$, ou $r = 0$, donne l'axe instantané pour les points duquel le rayon de courbure n'est généralement pas infini.

On voit ainsi que *le lieu des points pour lesquels le rayon de courbure est normal à la direction de l'axe instantané est un plan perpendiculaire à la vitesse orthogonale.*

2° $S = 0$ ou

$$(10) \qquad -\omega^2(x^2+y^2) - \mu zx + (n+\omega U)\,y = 0.$$

Cette équation représente le lieu des points pour lesquels l'accélération normale est perpendiculaire à r. Ce lieu sera en général une surface du second degré douée de centre; car les équations qui déterminent ce point se réduisant à

$$z = 0, \quad x = 0, \quad -2\omega^2 y + n + \omega U = 0,$$

donneront pour ses coordonnées des valeurs finies, lorsque la vitesse angulaire ne sera pas nulle. Supposant d'abord qu'il en soit ainsi, l'équation de la surface rapportée à son centre et à des axes parallèles aux coordonnées sera

$$\omega^2(x^2+y^2) - \mu zx - \left(\frac{n+\omega U}{2\omega}\right)^2 = 0,$$

et comme pour $x = 0$ on obtient deux droites, la surface est un hyperboloïde à une nappe dont l'axe des y est un axe réel principal.

Si k est l'angle que forme l'un des deux autres axes principaux avec la droite Ox, on a

$$\tang 2k = -\frac{\mu}{\omega^2},$$

et pour l'équation de la surface rapportée à ses axes principaux

$$\frac{x^2}{2}\left(\omega^2+\sqrt{\omega^4+\mu^2}\right) + \frac{z^2}{2}\left(\omega^2-\sqrt{\omega^4+\mu^2}\right) + \omega^2 y^2 - \left(\frac{n+\omega U}{2\omega}\right)^2 = 0.$$

Dans le cas où $\omega = 0$, on a aussi $\mu = 0$, et l'équation (10) se réduit à $y = 0$, qui représente le plan formé par l'axe de l'accélération angulaire et la vitesse orthogonale.

Si $\mu = 0$, par suite $n = 0$, l'équation (10) devient

$$\omega^2 (x^2 + y^2) + \omega U y = 0,$$

et représente un cylindre droit à base circulaire parallèle à l'axe instantané. En résumant, on a les théorèmes suivants :

Le lieu des points pour lesquels l'accélération normale ou le rayon de courbure de la trajectoire est parallèle à l'axe instantané, est : 1° en général, un hyperboloïde à une nappe dont l'un des plans principaux est parallèle au plan déterminé par la vitesse orthogonale et l'axe instantané, et qui est coupé suivant des cercles par des plans perpendiculaires à cet axe ; 2° le plan déterminé par l'axe de l'accélération angulaire et la vitesse orthogonale, lorsque la vitesse angulaire est nulle ; 3° un cylindre droit à base circulaire, dont une génératrice coïncide avec l'axe instantané, lorsque deux positions consécutives de cet axe sont parallèles.

Le lieu des points dont les accélérations normales sont nulles, c'est-à-dire l'intersection des surfaces représentées par les équations (9) et (10), est donné par l'équation

$$-\omega^2 y^2 + pz + (n + \omega U) y - \omega^2 \frac{p^2}{\mu^2} = 0,$$

qui représente une parabole du second degré, dont le plan est perpendiculaire à la vitesse orthogonale et dont l'axe de figure est parallèle à l'axe instantané de rotation et de glissement, et l'on a, pour les coordonnées du sommet de la parabole

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\omega^2} + \frac{U}{\omega}\right), \quad z = \frac{p\omega^2}{\mu^2} - \frac{1}{4p}\left(\frac{n + \omega U}{\omega}\right)^2.$$

Cette parabole se réduit à l'axe instantané et à une parallèle

à sa direction, menée à la distance $y = \frac{n}{\omega^2} + \frac{U}{\omega}$, dans le plan perpendiculaire à la vitesse orthogonale, lorsque la vitesse de glissement conserve la même valeur pendant deux instants consécutifs ou que $p = 0$.

Dans le cas où le système se meut parallèlement à un plan, on a

$$\mu = 0, \quad p = 0,$$

et le lieu est un cylindre droit à base circulaire, ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé au n° 120.

142. *Lieu géométrique des points pour lesquels l'accélération tangentielle est nulle.* — La composante $\frac{Xy - Yx}{r}$ de X et Y suivant ωr a pour projection suivant la vitesse du point considéré $\frac{Xy - Yx}{r} \cdot \frac{\omega r}{\sqrt{Q^2 + \omega^2 r^2}}$; Z donne lieu à la composante $Z \cdot \frac{Q}{\sqrt{Q^2 + \omega^2 r^2}}$ suivant la même direction. On a donc, pour l'accélération tangentielle

$$\varphi_t = \frac{ZQ + (Xy - Yx)\omega}{\sqrt{Q^2 + \omega^2 r^2}}$$
$$= \frac{\omega\mu yz - \omega\nu(y^2 + x^2) - (n + \omega U)\omega x + (p - \mu x)Q}{\sqrt{Q^2 + \omega^2 r^2}},$$

ou

$$\varphi_t = \frac{-\omega\nu(y^2 + x^2) + \omega\mu yz - x(n\omega + \omega^2 U + \mu Q) + pQ}{\sqrt{Q^2 + \omega^2 r^2}}.$$

Le lieu des points pour lesquels cette accélération est nulle a pour équation

$$(a) \quad \nu\omega(y^2 + x^2) - \omega\mu zy + x(n\omega + \omega^2 U + \mu Q) - pQ = 0;$$

c'est donc une surface du second ordre qui en général aura un centre, car les équations entre les coordonnées de ce centre se réduisent ici à

$$z = 0, \quad y = 0,$$

$$x = -\frac{n\omega + \omega^2 U + \mu Q}{2\omega\nu},$$

et donneront pour ces coordonnées des valeurs finies lorsque, comme nous le supposerons d'abord, ω et ν ne seront pas nuls.

L'axe Ox est un diamètre principal de la surface qui, rapportée à son centre et à des axes parallèles aux coordonnées, est représentée par

$$\omega\nu(y^2 + x^2) - \omega\mu zy + \frac{(\omega^2 U + 2\mu Q)^2}{4\omega\mu} - pQ = 0,$$

en se rappelant que $n\omega = \mu Q$ (135).

En appelant k' l'angle formé avec Ox par l'un des deux autres axes principaux, on trouve

$$\operatorname{tang} 2k' = -\frac{\mu}{\nu}$$

et l'on a, pour l'équation de la surface rapportée à ses diamètres principaux,

$$y^2\left(\nu + \sqrt{\mu^2 + \nu^2}\right) + \left(\nu - \sqrt{\mu^2 + \nu^2}\right) z^2 + 2\nu x^2$$
$$- \frac{(\omega^2 U + 2\mu Q)^2}{2\nu\omega^2} + \frac{2pQ}{\omega} = 0.$$

A l'inspection de cette équation on reconnaît que *la surface sera tantôt un hyperboloïde à une nappe, tantôt un hyperboloïde à deux nappes, selon le signe de* ν, *et quelquefois même un cône du second degré*. Cette dernière circonstance se présentera notamment dans le cas d'un point fixe.

Si $\omega = 0$, par suite $\mu = 0$, l'accélération tangentielle ne peut être nulle qu'autant que l'on a $p = 0$ ou $Q = 0$; mais alors cette accélération est nulle pour tous les points du système.

Dans le cas où ω n'étant pas nul, on a $\nu = 0$, ce qui exprime que *la vitesse angulaire reste constante pendant deux instants consécutifs*, l'équation (a) de la surface devient

$$\omega\mu zy - x(\omega^2 U + 2\mu Q) + pQ = 0.$$

Cette surface n'a pas de centre, et comme tout plan parallèle à zOy donne une hyperbole, c'est un *paraboloïde hyperbolique dont l'axe est parallèle à la vitesse orthogonale. Ce paraboloïde se réduit à un cylindre droit hyperbolique lorsqu'on a de plus*

$$\omega^2 U + 2\mu Q = 0.$$

Dans le cas où deux positions consécutives de l'axe instantané sont parallèles, on a $\mu = 0$, et la surface représentée par

$$\omega\nu(y^2 + x^2) + \omega x(n + \omega U) - pQ = 0$$

est un cylindre droit à base circulaire parallèle à l'axe instantané, ce qui est conforme au résultat énoncé au n° 121. Si de plus $\nu = 0$, le lieu est un plan perpendiculaire à la vitesse orthogonale.

143. *Déterminer les éléments nécessaires à la construction du rayon de courbure et du plan osculateur du lieu géométrique décrit par un point d'un système invariable dont deux points sont assujettis à rester sur deux courbes fixes et dont un troisième point s'appuie constamment sur une surface donnée.* — Reportons-nous au n° 84, où nous avons cherché à construire la tangente au lieu décrit par le point mobile D, l'axe instantané de rotation et de

glissement, la vitesse de glissement, etc., et d'où l'on peut déduire les vitesses des quatre points A, B, C, D du système en se donnant la rotation instantanée supposée constante et égale à l'unité.

Les formules (2), (3), (4) du n° 135, donnent, pour les coordonnées du centre des accélérations, en y supposant $\omega = 1$, $\nu = 0$, $\lambda = 0$, et par suite $m = 0$,

$$z_1 = \frac{p}{\mu^2}, \quad x_1 = \frac{p}{\mu}, \quad y_1 = n + \mathrm{U}.$$

Il faut se rappeler que l'origine de ces coordonnées, subordonnée à la position de la vitesse orthogonale, est elle-même une inconnue de la question.

Connaissant la composante $\mathrm{Z}\cos a$ parallèle à l'axe des vitesses de l'accélération normale du point A (*fig.* 30, p. 102) déterminée par sa vitesse (84) et le rayon de courbure de la trajectoire, on construira facilement la longueur $\mathrm{Z}\cos a\sqrt{\frac{r^2+\mathrm{Q}^2}{r^2}}$ que nous représenterons par ζ. Nous poserons de plus $\sigma = \mathrm{S} + r$ et, comme au n° 138, $\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{x}{y}$. Les formules (6) et (7) appliquées aux points A et B pour lesquels on connaît les accélérations centripètes donnent, en accentuant les lettres pour le second,

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{\begin{aligned} &\zeta = p - \mu r\cos\varepsilon, \\ &\zeta' = p - \mu r'\cos\varepsilon', \\ &\frac{\sigma - \mu z\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} = y_1, \\ &\frac{\sigma' - \mu z'\cos\varepsilon'}{\sin\varepsilon'} = y_1. \end{aligned}\right.$$

Soient r'', ε'' les valeurs de r, ε relatives au point C; η, η' les

angles connus formés par les projections de r, r'' et de r', r'' sur un plan perpendiculaire à l'axe des vitesses, passant par exemple par ce point. Ces angles seront considérés comme de même signe ou de signes contraires, selon que leurs côtés non communs seront tous deux situés d'un même côté ou de part et d'autre de leur côté commun. Désignons par h, h' les distances des points C et A, B et A en projection sur l'axe des vitesses; on les considérera comme de même signe ou de signes contraires, selon qu'elles seront situées d'un même côté ou de part et d'autre du plan mené ci-dessus par le point C perpendiculairement à l'axe des vitesses. Nous aurons

$$(\mathrm{B}) \qquad \begin{cases} \varepsilon - \varepsilon'' = \eta, \\ \varepsilon' - \varepsilon'' = \eta', \\ z - z'' = h, \\ z' - z'' = h', \end{cases}$$

et alors les valeurs de z'' et ε'' doivent être portées respectivement à partir des origines des h et des η, dans le sens opposé de ces dernières grandeurs pour les mêmes signes. Il suffit d'ailleurs de connaître z'' et ε'' pour déterminer l'origine des coordonnées (x_1, y_1, z_1), la direction Ox de la vitesse orthogonale, et par suite celle des y_1. Mais les huit équations (A) et (B) sont insuffisantes, puisqu'elles ont lieu entre les neuf inconnues z, z', z'', ε, ε', ε'', μ, y_1, p; il faut donc chercher à en établir une neuvième.

Soient α l'angle inconnu formé par le plan osculateur de la trajectoire de C avec le plan normal à la surface, passant par le même élément de chemin; γ le rayon de courbure de la section déterminée dans la surface par ce dernier plan. Le rayon de courbure de la trajectoire du point C étant, d'après le théorème de Meunier, $\gamma \cos\alpha$, l'accélération normale de ce point sera de la forme $\frac{A}{\cos\alpha}$, A étant une lon-

gueur que l'on saura construire. Cette accélération se composera de l'accélération A dirigée suivant γ et d'une autre A tang α perpendiculaire à γ et à la vitesse de C.

Soient b et d les cosinus connus des angles formés par A et A tang α avec r''; a et c les cosinus des angles formés par les mêmes directions avec l'axe des vitesses, multipliés par $\frac{\sqrt{r''^2 + Q^2}}{r''}$; il vient

$$\zeta'' = A(a + c \tang \alpha), \quad S'' = A(b + d \tang \alpha),$$

par suite

$$A(a + c \tang \alpha) = p - \mu r'' \cos \varepsilon'',$$

$$\frac{A(b + d \tang \alpha) + r'' - \mu z'' \cos \varepsilon''}{\sin \varepsilon''} = \gamma_1.$$

Enfin, en éliminant tang α entre ces deux relations, on trouve pour l'équation cherchée

$$\text{(C)} \qquad \frac{B - pd + \mu \cos \varepsilon''(r''d + cz'')}{c \sin \varepsilon''} = -\gamma_1,$$

B désignant la longueur $A(ad - bc) - r''c$.

Lorsque la surface directrice sera un plan, la direction de l'accélération normale du point C sera connue, et la formule (C) subsistera encore en y supposant $A = 0$, et considérant c et d comme se rapportant à cette direction.

Des deux premières équations (A) on tire

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \mu = \dfrac{\zeta' - \zeta}{r \cos \varepsilon - r' \cos \varepsilon'}, \\ p = \dfrac{\zeta' r \cos \varepsilon - \zeta r' \cos \varepsilon'}{r \cos \varepsilon - r' \cos \varepsilon'}. \end{cases}$$

Portant ces valeurs dans les résultats obtenus en élimi-

nant y_1, z, z' entre les deux dernières équations (A), les deux premières équations (B) et l'équation (C), on trouve

$$z'' = -\frac{(B-\zeta' d)\, r \sin\varepsilon \cos\varepsilon - (B-\zeta d)\, r' \sin\varepsilon' \cos\varepsilon' + (\zeta'-\zeta)\, r'' d \sin\varepsilon \cos\varepsilon'' - [h(\zeta'-\zeta) - \sigma r]\, c \cos\varepsilon \sin\varepsilon'' - c\,\sigma r' \cos\varepsilon' \sin\varepsilon''}{(\zeta'-\zeta)\sin\eta},$$

$$z'' = \frac{(B-\zeta d)\, r' \sin\varepsilon' \cos\varepsilon' - (B-\zeta' d)\, r \sin\varepsilon' \cos\varepsilon + (\zeta-\zeta')\, r'' d \sin\varepsilon' \cos\varepsilon'' - [h(\zeta-\zeta') - \sigma' r']\, c \cos\varepsilon' \sin\varepsilon'' - c\,\sigma' r \cos\varepsilon \sin\varepsilon''}{(\zeta'-\zeta)\sin\eta'};$$

d'où l'on déduit enfin, eu égard aux deux dernières équations (B),

$$\tang\varepsilon'' = \frac{-[r(B-d\zeta')\cos\eta - r'(B-d\zeta)\cos\eta' + (\zeta'-\zeta)\, r'' d]\sin(\eta'-\eta) + [h(\zeta'-\zeta) - \sigma r]\, c\cos\eta\sin\eta' + [h'(\zeta-\zeta') - \sigma' r']\, c\cos\eta'\sin\eta + \frac{c}{2}(\sigma r'\sin 2\eta' + \sigma' r \sin 2\eta)}{-[r(B-d\zeta')\sin\eta - r'(B-d\zeta)\sin\eta']\sin(\eta'-\eta) + [(\zeta-\zeta')(h-h') + (\sigma' r' - \sigma r)]\, c\sin\eta\sin\eta' + \sigma r' \sin^2\eta' - \sigma' r \sin^2\eta}.$$

On peut dès lors déterminer ε'', puis z'', par des constructions géométriques que nous supposerons effectuées. On aura par suite les valeurs de ε, ε', r, r'. Enfin on déduit facilement des équations (A) et (D)

$$y_1 = \frac{\sigma - \dfrac{(\zeta'-\zeta)\, r\cos\varepsilon}{r\cos\varepsilon - r'\cos\varepsilon'}}{\sin\varepsilon}, \quad x_1 = \frac{\zeta' r\cos\varepsilon - \zeta r'\cos\varepsilon'}{\zeta'-\zeta}, \quad z_1 = \frac{(\zeta' r\cos\varepsilon - \zeta r'\cos\varepsilon')(r\cos\varepsilon - r'\cos\varepsilon')}{(\zeta'-\zeta)^2},$$

dont la construction géométrique ne présentera aucune difficulté.

Soient r''', ε''', x''', y''', z''' les valeurs de r, ε, x, y, z relatives au point D; $\varepsilon''' - \varepsilon$ étant donné et la valeur de ε résultant du calcul précédent, ε''' peut être considéré comme connu et les formules (6) et (7) donnent pour les composantes de l'accélération normale relatives à D, eu égard aux valeurs de x_1, y_1, z_1 en fonction de m, n, p, μ, U,

$$S''' = \frac{-r'''^2 + y_1 y''' + \frac{z''' x''' x_1}{z_1}}{r'''} = -r''' + y_1 \sin\varepsilon''' + \frac{z'''}{z_1} x_1 \cos\varepsilon''',$$

$$Z''' \cos a''' = \frac{x_1}{z_1}(x_1 - x'')\frac{r'''}{\sqrt{Q^2 + r'''^2}},$$

expressions susceptibles d'une construction géométrique, et d'où l'on déduira l'accélération normale φ_n''' et le rayon de courbure ρ''' en construisant $\frac{r'''^2 + Q^2}{\varphi_n'''}$.

144. *Expression de la vitesse orthogonale en fonction de l'accélération d'un point du système.* — Soient Gz' (*fig.* 59, p. 198) l'axe instantané de rotation relatif au point G, parallèle à l'axe de glissement Oa; P la composante de la vitesse de G, perpendiculaire au plan z'GOa, la composante suivant Oa étant Q (89); GI la perpendiculaire abaissée du point G sur Oa. L'accélération du point G peut être considérée comme la résultante de l'accélération de glissement et de l'accélération due à la vitesse P, à laquelle nous donnerons le nom d'*accélération complémentaire*, on a (88)

$$\omega . \mathrm{GI} = \mathrm{P}.$$

Je prends pour axes coordonnés Gz', la direction Gy du prolongement de GI et celle Gx' de P; nous supposerons que les axes passant par le point O ont été menés parallèlement à ces derniers. D'après le n° 129, les formules (1) du n° 135 sont applicables au nouveau système de coordonnées, en y supposant U = 0, et en y remplaçant m, n, p,

par $m+m'$, $n+n'$, $p+p'$, m', n', p' étant les projections de l'accélération complémentaire sur les axes. De sorte que l'on a, pour déterminer le centre instantané des accélérations,

$$\lambda y' - \mu x' + p + p' = 0,$$
$$-\omega^2 x' + \mu z' - \nu y' + m + m' = 0,$$
$$-\omega^2 y' + \nu x' - \lambda z' + n + n' = 0.$$

Soit z'_1 le z' du point O; il vient, en rapportant les équations (1) du n° 135 aux mêmes axes,

$$\lambda\left(y' + \frac{P}{\omega}\right) - \mu x' + p = 0,$$
$$\mu(z' - z'_1) - \nu\left(y' + \frac{P}{\omega}\right) + m + \omega U \cos\delta - \omega^2 x' = 0,$$
$$\nu x' - \lambda(z' - z'_1) + n + \omega U \sin\delta - \omega^2\left(y' + \frac{P}{\omega}\right) = 0.$$

De la comparaison entre les six équations on déduit

$$(\delta)\qquad \begin{cases} \dfrac{P}{p'} = \dfrac{\omega}{\lambda}, \\ \mu z'_1 + \nu\dfrac{P}{\omega} - \omega U \cos\delta + m' = 0, \\ \lambda z'_1 + \omega U \sin\delta - n' - \omega P = 0. \end{cases}$$

La première de ces formules constitue un théorème que l'on peut énoncer ainsi :

145. *Le rapport de la vitesse d'un point du système perpendiculaire à l'axe instantané, à la composante suivant cet axe de l'accélération à laquelle elle donne lieu, est égal au rapport de la vitesse angulaire instantanée à la composante de l'accélération angulaire suivant la direction de la vitesse ci-dessus du point.*

Des deux autres équations (δ) on déduit, en se rappelant les valeurs de $\sin\delta$ et $\cos\delta$ (135) et supposant ω différent

de zéro, ainsi que l'une au moins des deux quantités λ et μ,

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} U = \dfrac{m'\lambda + n'\mu + p'\nu + \omega P\mu}{\omega\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}, \\[2ex] z'_1 = \dfrac{-m'\mu + n'\lambda - \dfrac{\nu\mu}{\lambda}p' + \omega P\lambda}{\lambda^2+\mu^2}. \end{cases}$$

La première de ces expressions peut se mettre sous la forme suivante :

$$U = \frac{(m'\lambda + n'\mu + p'\nu + \omega P\mu)}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}} \cdot \frac{1}{\omega\sqrt{\dfrac{\lambda^2+\mu^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}};$$

ce qui exprime que :

146. *La vitesse orthogonale est égale à la somme des projections de l'accélération complémentaire d'un point du système et de l'accélération centrifuge de ce point par rapport à l'axe de glissement, sur la direction de l'accélération angulaire, divisée par la composante de la vitesse angulaire normale à ce dernier axe.*

D'où cette autre proposition :

147. *Pour que deux axes consécutifs de rotation et de glissement se rencontrent, il faut que la résultante de l'accélération complémentaire d'un point et de l'accélération centrifuge de ce point par rapport à l'axe de glissement soit perpendiculaire à l'axe de l'accélération angulaire, et cette relation devra avoir lieu constamment pour que le lieu des axes de glissement soit une surface développable.*

148. Dans le cas où l'axe de l'accélération angulaire se confond avec l'axe instantané de rotation, c'est-à-dire lorsque $\lambda = 0$, $\mu = 0$, les formules (δ) deviennent, en y supposant de plus $z'_1 = 0$, puisque alors deux axes consécutifs

de glissement sont parallèles,

$$\nu \frac{P}{\omega} - \omega U \cos\delta + m' = 0,$$

$$\omega U \sin\delta - n' - \omega P = 0,$$

d'où l'on déduit

$$U = \frac{1}{\omega}\sqrt{(n' + \omega P)^2 + \left(m' + \nu \frac{P}{\omega}\right)^2},$$

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{n' + \omega P}{m' + \nu \frac{P}{\omega}}.$$

Ces formules sont spécialement applicables au cas d'une figure plane mobile dans son plan; m', n' sont alors les composantes de l'accélération totale de G, et l'on voit que U ne peut être nulle qu'autant qu'on a à la fois

$$n' = -\omega P \quad \text{et} \quad m' = -\frac{\nu P}{\omega}.$$

149. *Condition analytique pour que le lieu géométrique des axes instantanés de rotation et de glissement forme une surface développable.* — Supposons que les trois axes rectangulaires Gx', Gy', Gz' passant par le point G et mobiles avec le septième invariable, aient des directions tout à fait arbitraires par rapport à celle de l'axe instantané de rotation. Soient GA l'axe instantané de rotation passant par le point G, P la composante normale à GA de la vitesse du point G, Oa l'axe instantané de rotation et de glissement, u, v, w les composantes de la rotation instantanée suivant Gx', Gy', Gz'; $P_{x'}$, $P_{y'}$, $P_{z'}$ les projections correspondantes de P. Nous savons que la distance GO du point G à Oa est perpendiculaire à P et égale à $\frac{\omega}{P}$.

La vitesse *relative* de l'extrémité C de la droite qui représente P, par rapport aux axes Gx', Gy', Gz', est égale

à la résultante de la vitesse absolue qui représente l'accélération complémentaire, et de la vitesse d'*entraînement* ou de celle que posséderait le même point s'il était invariablement lié aux axes mobiles (*) ; cette dernière a pour expression

$$P\omega = \frac{P}{\omega} \cdot \omega^2 = GO \cdot \omega^2,$$

ce qui n'est autre chose que l'accélération centrifuge de O par rapport à O'A'. Il résulte de là que la vitesse relative de C doit être perpendiculaire à l'axe de l'accélération angulaire. On a ainsi

$$(\lambda) \qquad \frac{du}{dt}\frac{dP_x}{dt} + \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dP_y}{dt} + \frac{dw}{dt} \cdot \frac{dP_z}{dt} = 0,$$

avec l'identité

$$(\mu) \qquad uP_x + vP_y + wP_z = 0.$$

Soient V_x, V_y, V_z les composantes parallèles aux axes de la vitesse de G. On a

$$P_x = V_{x'} - \frac{u}{\omega}\left(\frac{u}{\omega}V_{x'} + \frac{v}{\omega}V_{y'} + \frac{w}{\omega}V_{z'}\right)$$

$$= \frac{V_{x'}(v^2 + w^2) - uvV_{y'} - uwV_{z'}}{u^2 + v^2 + w^2},$$

$$P_y = \frac{V_{y'}(u^2 + w^2) - vuV_{x'} - vwV_{z'}}{u^2 + v^2 + w^2},$$

$$P_z = \frac{V_{z'}(u^2 + w^2) - wuV_{x'} - wvV_{y'}}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

En général V ne sera connu que par ses projections V_X, V_Y, V_Z, sur trois axes fixes en fonctions desquelles on exprimera $V_{x'}$, $V_{y'}$, $V_{z'}$, en faisant usage des formules de transfor-

(*) On peut, en effet, considérer l'accélération d'un point mobile comme la vitesse de l'extrémité de la droite de position variable qui représente à chaque instant la vitesse du mobile.

mation du n° 98 et en faisant ces substitutions dans la formule (λ) on aura la condition à laquelle doivent satisfaire les éléments du mouvement pour que le lieu géométrique des axes instantanés de rotation et de glissement forme une surface développable (*).

150. *Relations entre les projections de la vitesse de l'origine de trois axes rectangulaires mobiles sur les axes, et les projections analogues de l'accélération de ce point.* — Il existe entre $V_{x'}$, $V_{y'}$, $V_{z'}$ et les projections $\varphi_{x'}$, $\varphi_{y'}$, $\varphi_{z'}$ de l'accélération φ de G sur les axes mobiles, des relations qu'il peut être utile de connaître. Remarquons à cet effet que la projection de l'accélération de G ou de la vitesse de l'extrémité de la droite qui représente V, est égale à la somme des composantes analogues $\frac{dV_{x'}}{dt}$, $vV_{z'} - wV_{y'}$ de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement. On a donc les équations

$$\frac{dV_{x'}}{dt} + vV_{z'} - wV_{y'} = \varphi_{x'},$$

$$\frac{dV_{y'}}{dt} + wV_{x'} - uV_{z'} = \varphi_{y'},$$

$$\frac{dV_{z'}}{dt} + uV_{y'} - vV_{x'} = \varphi_{z'},$$

qui permettront de déterminer $V_{x'}$, $V_{y'}$, $V_{z'}$, lorsque $\varphi_{x'}$, $\varphi_{y'}$, $\varphi_{z'}$, q, r, s seront connus.

(*) Si l'on voulait trouver les relations qui doivent exister entre les forces qui sollicitent le corps solide, pour que lieu des axes instantanés fût une surface développable, il suffirait de supposer que G est le centre de gravité du corps et joindre à l'équation (λ) les six équations relatives au mouvement d'un corps solide.

CHAPITRE CINQUIÈME.

DU MOUVEMENT RELATIF.

§ Ier. — Du Mouvement relatif d'un point par rapport a un système invariable mobile.

151. *Des accélérations apparentes dans le mouvement relatif.* — Soient V et φ la vitesse et l'accélération, à un instant quelconque, d'un point mobile m dont on se propose de trouver le mouvement relatif par rapport à un système invariable (S), lui-même mobile d'une manière quelconque dans l'espace absolu,

V_e, φ_e la vitesse et l'accélération, dites *d'entraînement*, que posséderait le point a de l'espace où se trouve actuellement le point m, si on le considérait comme faisant partie du système (S);

V_r la résultante de V et d'une vitesse $-V_e$, égale et contraire à V_e;

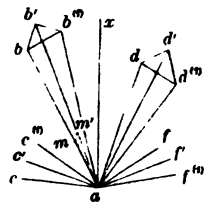
U_r la projection de V_r sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation et de glissement;

ω la vitesse angulaire de (S) autour de cet axe.

Le mouvement relatif de m ne sera pas altéré, si l'on conçoit qu'on imprime à ce mobile, ainsi qu'à (S), un mouvement translatoire dont la vitesse et l'accélération soient précisément égales et contraires à V_e et φ_e. Le point a se trouvant ainsi ramené au repos, le système tournera autour d'un axe ax (*fig.* 60), parallèle à l'axe instantané

de rotation et de glissement de (S) avec la vitesse angulaire ω, et le point m pourra actuellement être considéré comme se mouvant dans l'espace absolu en vertu de la vitesse V_r et de l'accélération $\overline{\varphi} - \overline{\varphi}_e$. On est ainsi ramené à étudier le mouvement relatif du point m, supposé animé du mouvement absolu que l'on vient de définir, par rapport au système tournant autour du point a ou de l'axe ax, système que nous désignerons par (S').

Fig. 60.



Il est clair que la *vitesse relative* de m ne sera autre chose que V_r; puisque les points infiniment voisins de ax, tels que m, ne décrivent dans le temps dt que des arcs du second ordre. Dans le même temps dt, la droite ab, qui représente V_r, tourne autour de ax de l'angle $\omega\, dt$, vient en ab', et le mobile prend, sur cette dernière direction, la position m' déterminée par $am' = V_r\, dt$.

La vitesse absolue du point m' ou du mobile m au bout du temps dt se compose de V_r et de l'accélération élémentaire $\overline{\varphi dt} - \overline{\varphi_e dt}$.

En négligeant les termes du second ordre, ou le déplacement angulaire de ax dans le temps dt, et en remarquant que la distance de m' à ax est $U_r dt$, la vitesse d'entraînement de m' par rapport à (S') est égale à $\omega U_r dt$ et est représentée en grandeur et en direction par bb', au facteur ω près.

Si donc on représente par $ab^{(1)}$ la vitesse relative de m', on a

$$\overline{ab^{(1)}} = \overline{ab} + \overline{\varphi dt} - \overline{\varphi_e dt} - \overline{\omega U_r dt},$$

d'où

$$\overline{bb^{(1)}} = \overline{\varphi dt} - \overline{\varphi_e dt} - \overline{\omega U_r dt}.$$

Or $b'b^{(1)}$ n'est autre chose que l'accélération relative élémentaire $\varphi_r\, dt$; de plus

$$\overline{bb^{(1)}} = \overline{b'b^{(1)}} + \overline{bb'} = \overline{\varphi_r dt} + \overline{\omega U_r dt},$$

d'où l'on déduit pour l'accélération relative

$$\overline{\varphi}_r = \overline{\varphi} - \varphi_e - 2\omega U_r.$$

Ainsi *l'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire, et enfin de l'*ACCÉLÉRATION CENTRIFUGE COMPOSÉE $2\omega U_r$, *dont la direction s'obtient en supposant que l'on fasse subir à* U_r *un quart de révolution autour de l'axe instantané, en sens inverse de la vitesse angulaire.*

On remarquera que l'accélération centrifuge composée est perpendiculaire à la direction de la vitesse relative.

Toutes les formules établies pour le mouvement absolu subsistent donc pour le mouvement relatif, pourvu que l'on introduise, en outre de l'accélération absolue, les accélérations apparentes : centrifuge composée et d'entraînement (*).

152. *Du repos relatif d'un point. — Application à la gravité.* — Il résulte de ce qui précède que pour qu'un point, primitivement en repos relatif, reste en repos, il faut et il suffit que l'accélération dans le mouvement absolu et l'accélération d'entraînement soient égales et de même sens.

Considérons en particulier ce qui a lieu lorsque le système invariable tourne uniformément autour d'un axe fixe avec la vitesse angulaire ω. L'accélération d'entraînement sera, dans ce cas, l'accélération centripète $\omega^2 r$, r étant la distance du point mobile à l'axe de rotation.

La terre étant animée d'un mouvement de rotation uniforme, les phénomènes qui s'observent à sa surface doivent accuser l'existence de ce mouvement; mais, comme sa vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86164^s} = 0,000073$ est extrê-

(*) En multipliant par la masse, on a les forces apparentes de Coriolis

mement faible par rapport aux vitesses que l'on considère généralement, l'influence de la rotation terrestre n'est sensible que dans un petit nombre de faits mis en évidence par des expériences exécutées avec un grand soin.

Si l'on considère le fil à plomb, ce fil, par sa résistance, détruit la résultante de l'accélération centrifuge et de celle qui provient de la tendance des corps à se précipiter vers le centre de la terre. Cette résultante, que nous avons appelée g, et dont la direction est celle de *la verticale apparente* du lieu, n'est donc point constante en tous les points de la terre; elle dépend de la latitude, suivant une certaine loi que nous allons chercher à déterminer.

Soit G la valeur de la gravité au pôle, qui serait la même en tous les points de la terre, sans la rotation diurne, et sans le faible défaut de sphéricité qu'affecte notre globe, mais que nous négligerons ici. En appelant R le rayon terrestre, λ la latitude du lieu, on obtient, par la composition des accélérations, la relation

$$g = \sqrt{G^2 + \omega^4 R^2 \cos^2\lambda - 2 G \omega^2 R^2 \cos^2\lambda},$$

d'où

$$G = \omega^2 R \cos^2\lambda + \sqrt{g^2 - \frac{1}{4}\omega^4 R \sin^2 2\lambda}.$$

La plus grande valeur de $\sin 2\lambda$ correspond à $\lambda = 45°$, et l'erreur que l'on serait exposé à commettre en négligeant le second terme sous le radical serait inférieure à $0{,}0000015\,g$; de sorte que l'on peut prendre simplement

$$G = g + \frac{4\pi^2 R}{T^2}\cos^2\lambda = g + 0{,}03667\cos^2\lambda.$$

A la latitude de Paris, où $\lambda = 48° 50' 14''$, on a $g = 9{,}8088$, par suite

$$G = 9^m{,}8234.$$

A l'équateur, où $\lambda = 0$, l'accélération centrifuge retranche

de la valeur de G la quantité $0^m,03367 = \frac{1}{290} \cdot 9,8088$; mais en réalité la valeur de g à l'équateur est un peu moindre que $9,8088\left(1 - \frac{1}{290}\right)$, à cause du renflement de la terre; elle suit en général une loi donnée par la formule

$$g = 9,830094 - 0,05074 \cos^2 \lambda,$$

déduite des recherches de Laplace.

153. *Relation entre la vitesse relative et les accélérations.* — Soient v_r, v_{0_r} les valeurs de la vitesse relative à la fin et au commencement d'un certain intervalle de temps; ds l'élément de chemin de la trajectoire *apparente*, ou rapportée au système (S), lequel est perpendiculaire à l'accélération centrifuge composée; φ', φ'_e les projections de φ, φ_e sur la direction de ds. Il vient, en appliquant les principes des n°s 62 et 151,

$$\frac{1}{2}(v_r^2 - v_{0_r}^2) = \int \varphi' ds - \int \varphi'_e ds.$$

Dans le cas où le système invariable est animé d'un mouvement de rotation uniforme, on a

$$\varphi_e = \omega^2 r \quad \text{et} \quad \int \varphi'_e ds = -\int_{r_0}^{r} \omega^2 r dr = \frac{\omega^2}{2}(r_0^2 - r^2),$$

d'où

$$\frac{1}{2}(v_r^2 - v_{0_r}^2) = \int \varphi' ds + \frac{\omega^2}{2}(r^2 - r_0^2).$$

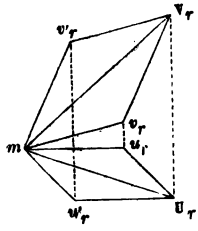
S'il s'agit du mouvement relatif, par rapport à la terre, d'un point uniquement soumis à l'action de la pesanteur, on a tout simplement, en appelant h la hauteur de la chute,

$$v_r^2 - v_{0_r}^2 = 2gh,$$

comme dans le mouvement absolu, puisque l'accélération g, donnée par l'observation, est la résultante de l'attraction terrestre et de l'accélération d'entraînement prise en sens inverse.

154. *Si un point m est animé de deux mouvements relatifs simultanés par rapport à un système invariable* (S) *mobile, l'accélération centrifuge composée dans le mouvement résultant est la résultante des accélérations semblables, correspondant aux mouvements composants.*

Fig. 61.



Soient (*fig.* 61) v_r, v'_r les vitesses des deux mouvements composants à un instant donné; V_r leur résultante; u_r, u'_r, U_r les projections de ces trois vitesses sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané de (S); mA la parallèle à cet axe menée par le point m; ω la vitesse angulaire instantanée de (S).

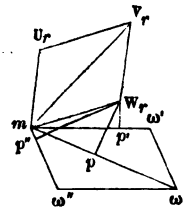
Les accélérations centrifuges composées correspondant aux vitesses v_r, v'_r, V_r, en faisant abstraction du facteur commun 2ω, étant proportionnelles aux longueurs u_r, u'_r, U_r, le théorème énoncé devient évident; car, pour avoir ces accélérations en grandeur et en direction, il suffit de concevoir que l'on fasse subir au parallélogramme $mv_rV_rv'_r$, autour de mA, un quart de révolution en sens inverse de ω.

155. *Si l'on considère la rotation instantanée ω du système* (S), *comme la résultante de deux rotations simultanées ω', ω'', l'accélération centrifuge composée du point m peut être considérée comme la résultante des accélérations analogues correspondant aux rotations partielles prises isolément.*

Soient (*fig.* 62) $m\omega$, $m\omega'$, $m\omega''$ les droites qui représentent la rotation instantanée et ses deux composantes;

U_r, W_r les composantes, perpendiculaire et parallèle au plan $m\omega\omega'\omega''$, de la vitesse relative V_r; p, p', p'' les distances de l'extrémité de la droite que représente U_r aux droites $m\omega$, $m\omega'$, $m\omega''$. D'après ce qui précède, il suffit de démontrer que le théorème a lieu pour chacune des composantes U_r, W_r.

Fig. 62.



Les accélérations centrifuges composées, correspondant à la vitesse W_r, pour les trois rotations ci-dessus, ont respectivement pour expressions $2\omega p$, $2\omega' p'$, $2\omega'' p''$, et comme elles sont dirigées toutes trois suivant U_r, la première est la résultante des deux autres, car, d'après le n° 66, on a

$$\omega p = \omega' p' + \omega'' p''.$$

Les accélérations centrifuges composées relatives à la vitesse U_r étant proportionnelles aux longueurs $m\omega$, $m\omega'$, $m\omega''$, la seconde partie du théorème devient évidente; car, pour avoir ces accélérations en grandeur et en direction, il suffit de concevoir que l'on fasse subir, dans le sens voulu, autour de mU_r, un quart de révolution au parallélogramme $m\omega\omega'\omega''$.

La généralisation et la réciproque des deux propriétés précédentes des accélérations centrifuges composées sont trop évidentes pour qu'il soit nécessaire de nous y arrêter.

156. *Influence de la rotation de la terre sur la chute des graves.* — La rotation de la terre produit sur les corps pesants, tombant sans vitesse initiale d'une certaine hauteur, des déviations assez sensibles, relativement à la verticale du point de départ (152), pour qu'on puisse les observer directement.

Pour nous rendre compte de ce phénomène, décomposons la rotation ω en deux autres, l'une $\omega \sin\lambda$ autour de cette verticale, l'autre $\omega \cos\lambda$ autour d'une parallèle à la

méridienne, en continuant à désigner par λ la latitude du lieu. Soient V', V'' les projections de la vitesse relative V du mobile correspondant à la hauteur de chute z, sur le plan horizontal et le plan vertical passant par la tangente au parallèle.

Les composantes de l'accélération centrifuge composée sont

$$2\omega \sin\lambda . V', \quad 2\omega \cos\lambda . V'',$$

respectivement situées dans les plans horizontal et vertical ci-dessus. La première ne produira pas d'effet sensible sur le mobile en projection horizontale; car la vitesse V', nulle avec ω, est du même ordre de grandeur que cette quantité; de sorte que si l'on continue à négliger ω^2, il n'y a pas lieu de tenir compte de cette accélération. L'accélération $2\omega\cos\lambda . V''$ ne diffère de $2\omega\cos\lambda . V$ que d'une quantité de l'ordre ω^2, et doit être considérée, avec la même approximation, comme dirigée suivant la tangente au parallèle, de même que l'on peut prendre ici, $V = gt$.

La projection horizontale du mobile se déplace donc, dans le sens du parallèle, de l'orient vers l'occident, en vertu de l'accélération $2\omega\cos\lambda . gt$, ou avec la vitesse $\omega\cos\lambda\, gt^2$, et l'espace parcouru au bout du temps t est

$$S = \frac{1}{3}\omega \quad \lambda . gt^3,$$

ou, en remarquant que l'on peut supposer $z = \frac{1}{2}gt^2$, d'après le mode d'approximation adopté,

$$S = \frac{2}{3}\omega \cos\lambda . z \left(\frac{2z}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le mobile décrit ainsi, dans le plan vertical, passant par la tangente au parallèle, une parabole du degré $\frac{2}{3}$.

Ces considérations théoriques sont vérifiées par l'expé-

rience d'une manière très-satisfaisante. M. Reech a déduit, en effet, d'un très-grand nombre de résultats, obtenus en laissant tomber un corps dans les mines de Freyberg, d'une hauteur de $158^m,5$, pour la déviation dans le sens du parallèle $0^m,0283$, la déviation vers le sud étant de quelques millimètres seulement. Or si l'on fait dans les formules ci-dessus

$$z = 158^m,5, \quad \omega = \frac{2\pi}{85164}, \quad t = 6^s, \quad \lambda = 51^\circ,$$

on trouve pour la déviation totale

$$S = 0,0276,$$

chiffre qui diffère très-peu de la valeur donnée par l'expérience.

157. *Influence de la rotation de la terre sur le pendule.* — Conservons les mêmes notations que tout à l'heure, et appelons l la longueur du pendule; ρ le rayon vecteur, supposé très-petit, mené de la projection horizontale du point pesant au pied de la verticale de suspension; θ l'angle formé par ρ avec la méridienne; z la projection de la longueur du pendule sur la verticale; ρ_0, θ_0, V_0 les valeurs initiales de ρ, θ, V. On a (153)

$$V^2 - V_0^2 = 2g(z_0 - z).$$

Or, en négligeant la quatrième puissance de ρ, on a

$$z = \sqrt{l^2 - \rho^2} = l - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{l};$$

et de même

$$z_0 = l - \frac{1}{2}\frac{\rho^2}{l},$$

par suite

$$V^2 - V_0^2 = \frac{g}{l}(\rho^2 - \rho_0^2).$$

En projection horizontale, la vitesse V a pour composantes respectivement dirigées suivant ρ et la perpendiculaire à cette direction, $\frac{d\rho}{dt}$, $\rho\frac{d\theta}{dt}$; d'ailleurs, dans le mode d'approximation adopté, on peut négliger la composante verticale $\frac{dz}{dt}$, et par suite poser tout simplement

$$V^2 = \frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2 \frac{d\theta^2}{dt^2},$$

et enfin

$$(a) \qquad \frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = V_0^2 + g(\rho_0^2 - \rho^2).$$

La composante $2\omega V'' \cos\lambda$ de l'accélération centrifuge composée étant sensiblement verticale, n'a qu'une influence insensible sur le mouvement du pendule en projection horizontale et peut être négligée.

La composante de l'accélération $2\omega V' \sin\lambda$, perpendiculaire à ρ, due à celle de $V' = \frac{d\rho}{dt}$ de la vitesse estimée suivant cette dernière direction, a pour expression $2\omega \sin\lambda \frac{d\rho}{dt}$ et tend à faire tourner le mobile de l'orient vers l'occident ou inversement, selon que $\frac{d\rho}{dt}$ est positif ou négatif. On a donc (69)

$$\frac{d\rho^2 \frac{d\theta}{dt}}{dt} = 2\omega \sin\lambda \rho \frac{d\rho}{dt},$$

ou

$$(b) \qquad \frac{d}{dt}\rho^2 \frac{d}{dt}(\theta + \omega \sin\lambda t) = 0.$$

Si l'on pose

$$\theta + \omega \sin\lambda t = \varphi,$$

on aura

$$(c) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho^2 d\varphi}{dt}\right) = 0,$$

d'où

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{constante } C;$$

et comme $\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} - \omega \sin \lambda$, l'équation (a) vient, eu égard à la valeur de $\rho^2 \frac{d\varphi}{dt}$, en négligeant le carré de ω, et désignant par C' la constante $V_0^2 + 2\omega C$,

$$(d) \qquad \frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2 \frac{d\varphi^2}{dt} = C' + g(\rho_0^2 - \rho^2).$$

Or les équations (c) et (d) sont évidemment celles auxquelles on arriverait, en étudiant le pendule, abstraction faite de la rotation de la terre, C' désignant le carré de la vitesse initiale; d'où il suit qu'elles représentent une ellipse (54), dont les coordonnées polaires sont ρ et φ. Enfin la relation $\varphi = \theta + \omega \sin \lambda . t$ montre que cette ellipse tourne dans son plan autour de la verticale de suspension, du nord vers l'est, avec la vitesse angulaire $\omega \sin \gamma$; ce qui est conforme au résultat de l'expérience exécutée au Panthéon par M. Foucault.

L'équation (b), par l'intégration, peut se mettre sous la forme

$$\rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt} + \omega \sin \lambda\right) = \rho_0^2 \left[\left(\frac{d\theta}{dt_0}\right) + \omega \sin \lambda\right]$$

et l'on voit ainsi que ρ ne pourra devenir nul, ou que le pendule ne repassera par la verticale que lorsque l'on aura $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = -\omega \sin \lambda$, c'est-à-dire lorsque la rotation initiale imprimée au pendule autour de la verticale sera égale et de sens contraire à la rotation de la terre estimée suivant cette direction.

Dans le cas de l'expérience de M. Foucault où le pendule est abandonné à lui-même sans vitesse relative initiale, on a $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = 0$, le pendule ne passe pas par la verticale, et il est facile de déterminer son plus petit écart, lequel correspond évidemment au petit axe de l'ellipse.

La durée du parcours de l'ellipse est (54)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

pendant ce temps l'ellipse s'est déplacée de l'angle $\omega \sin\lambda . T$; de sorte que le pendule, rapporté à la méridienne et à la tangente au parallèle, a décrit autour de la verticale l'angle $2\pi \pm \omega \sin\lambda . T$, en prenant le signe $+$ ou le signe $-$, selon le sens de la vitesse initiale qu'on lui a imprimée. On aura donc pour le temps T_1 employé par le pendule à décrire l'angle 2π

$$T_1 = \frac{2\pi}{2\pi \pm \omega \sin\lambda . T} \times T = \frac{T}{1 \pm \omega \sin\lambda \sqrt{\frac{l}{g}}} = T\left(1 \mp \omega \sin\lambda \sqrt{\frac{l}{g}}\right).$$

Quant à la durée de révolution d'une ellipse, elle a pour expression

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega \sin\lambda} = \frac{24 \text{ heures}}{\sin\lambda};$$

à Paris, où $\lambda = 48^\circ\ 50'\ 14''$, on a $T = 32$ heures environ (*).

158. *Projections de l'accélération centrifuge composée sur trois axes rectangulaires faisant partie du système mobile. Équations générales du mouvement relatif d'un point.* — Soient α, β, γ les angles d'inclinaison, sur les trois axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, Oz, de la direction

(*) *Voyez* la Note III.

de l'axe instantané, pour laquelle la rotation ω a lieu de la droite vers la gauche pour l'observateur couché suivant cet axe et dont les pieds sont en O. Nous obtiendrons la projection de l'accélération centrifuge composée sur Ox, en faisant la somme des accélérations semblables, auxquelles conduit la considération de chacune des trois rotations partielles $\omega\cos\alpha$, $\omega\cos\beta$, $\omega\cos\gamma$, et des composantes de la vitesse relative, estimées suivant les trois axes coordonnés. La rotation $\omega\cos\gamma$ autour de Oz donne lieu à deux accélérations centrifuges composées parallèles aux deux autres axes Ox, Oy et dont la première est exprimée par $-2\omega\cos\gamma\frac{dy}{dt}$. La rotation autour de Oy donne de même la composante $2\omega\cos\beta\frac{dz}{dt}$ suivant Ox, et il vient pour la projection de l'accélération centrifuge composée sur cet axe

$$X_f = 2\omega\left(\cos\beta\frac{dz}{dt} - \cos\gamma\frac{dy}{dt}\right).$$

On trouverait de même

$$Y_f = 2\omega\left(\cos\gamma\frac{dx}{dt} - \cos\alpha\frac{dz}{dt}\right),$$

$$Z_f = 2\omega\left(\cos\alpha\frac{dy}{dt} - \cos\beta\frac{dx}{dt}\right).$$

Soient X, Y, Z les composantes parallèles aux axes de l'accélération absolue du mobile; X_e, Y_e, Z_e, les composantes analogues de l'accélération d'entraînement : l'équation du mouvement relatif du point m en projection sur Ox, sera

$$(1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\left(\cos\beta\frac{dz}{dt} - \cos\gamma\frac{dy}{dt}\right) + X - X_e.$$

Les deux autres équations du mouvement du point m se déduisent de cette dernière par une simple permutation

tournante, et sont

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{d^2t} = 2\omega\left(\cos\gamma\frac{dx}{dt} - \cos\alpha\frac{dz}{dt}\right) + Y - Y_e,$$

$$(3)\qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 2\omega\left(\cos\alpha\frac{dy}{dt} - \cos\beta\frac{dx}{dt}\right) + Z - Z_e.$$

A chacune de ces équations, on peut substituer l'une des suivantes, relatives aux aires, et qui s'en déduisent sans difficulté :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}\left(y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) &= 2\omega\left[\frac{dz}{dt}(y\cos\beta + x\cos\alpha) - \frac{1}{2}\cos\gamma\frac{d}{dt}(x^2+y^2)\right]\\ &\quad + (X - X_e)y - (Y - Y_e)x,\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}\left(z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2}\right) &= 2\omega\left[\frac{dx}{dt}(z\cos\gamma + y\cos\beta) - \frac{1}{2}\cos\alpha\frac{d}{dt}(y^2+z^2)\right]\\ &\quad + (Y - Y_e)z - (Z - Z_e)y,\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\left(x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2}\right) &= 2\omega\left[\frac{dy}{dt}(x\cos\alpha + z\cos\gamma) - \frac{1}{2}\cos\beta\frac{d}{dt}(x^2+z^2)\right]\\ &\quad + (Z - Z_e)x - (X - X_e)z.\end{aligned}\right.$$

Enfin on peut prendre, pour l'une des équations du mouvement, la formule suivante déduite du n° 153,

$$(7)\quad V_r^2 - V_r'^2 = 2\int[(X - X_e)dx + (Y - Y_e)dy + (Z - Z_e)dz],$$

formule dans laquelle V_r' et V_r représentent la vitesse initiale et à un instant quelconque, et qui se déduit également sans difficulté des équations (1), (2) et (3).

Les composantes de l'accélération d'entraînement s'obtiennent immédiatement dans le cas d'un mouvement de rotation uniforme du système (S) autour d'un axe fixe, et les formules ci-dessus deviennent immédiatement applicables.

Mais en général l'accélération d'entraînement ne sera

donnée que par l'accélération et la vitesse angulaires en projection sur les trois axes, et l'on devra substituer dans les formules précédentes les valeurs :

$$X_e = z\frac{dp}{dt} - y\frac{dq}{dt} - (p^2 + q^2)x + npy + nqz + \Psi_x,$$

$$Y_e = x\frac{dq}{dt} - z\frac{dn}{dt} - (n^2 + q^2)y + pnx + pqz + \Psi_y,$$

$$Z_e = y\frac{dn}{dt} - x\frac{dp}{dt} - (n^2 + p^2)z + nqx + pqy + \Psi_z,$$

$n, p, q, \Psi_x, \Psi_y, \Psi_z$ ayant ici la même signification qu'aux n°s 130 et 131. Dans ces relations il faudrait encore remplacer Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z par leurs valeurs tirées du n° 93 (*).

159. *Formules relatives au mouvement d'un point pesant par rapport à la terre.* — Si l'on veut avoir les formules relatives au mouvement d'un point pesant par rapport à la terre, on prendra, pour partie positive, 1° de l'axe des x, la portion de la parallèle à la méridienne dirigée vers l'équateur, 2° de l'axe des y, celle de la tangente au parallèle dirigée vers l'orient; 3° de l'axe des z, celle de la verticale dirigée vers le centre du globe. Cela étant, on a

$$\gamma = 90^\circ - \lambda, \quad \alpha = \lambda, \quad \beta = 90^\circ,$$
$$X - X_e = 0, \quad Y - Y_e = 0, \quad Z - Z_e = g,$$

et les formules (1), (2), (3), deviennent

$$(a) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt},$$

$$(b) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\left(\sin\lambda\frac{dx}{dt} - \cos\lambda\frac{dz}{dt}\right),$$

(*) *Voyez* à la Note V, placée à la fin du volume, l'application de ces formules au mouvement relatif du centre de gravité d'un système matériel.

et

$$(c) \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 2\omega\cos\lambda\,\frac{dy}{dt} + g \quad (*).$$

Ces formules sont notamment applicables au problème de la chute des graves résolu plus haut approximativement, et plus généralement au mouvement d'un projectile lancé avec une vitesse relative initiale V dont nous appellerons V_x, V_y, V_z les composantes parallèles aux axes. Ces formules sont intégrables, quelle que soit la grandeur de la vitesse angulaire ω. En effet, si l'on place l'origine des coordonnées à la position initiale du mobile, (a), (c) donnent immédiatement

$$(a') \qquad \frac{dx}{dt} = -2\omega\sin\lambda.y + V_x,$$

$$(c') \qquad \frac{dz}{dt} = 2\omega\cos\lambda.y + gt + V_z.$$

Éliminant y entre ces deux relations et intégrant, il vient

$$(d) \quad x\cos\lambda + z\sin\lambda = (V_x\cos\lambda + V_z\sin\lambda)t + \frac{1}{2}gt^2\sin\lambda.$$

Portant les valeurs (a'), (c') dans (b), on trouve

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -4\omega^2\left\{y - \frac{(V_x\sin\lambda - V_z\cos\lambda)}{2\omega} + \frac{gt\cos\lambda}{2\omega}\right\},$$

dont l'intégrale générale est de la forme

$$y - \frac{(V_x\sin\lambda - V_z\cos\lambda)}{2\omega} + \frac{g\cos\lambda}{2\omega}\cdot t = M\sin 2\omega t + N\cos 2\omega t.$$

Les constantes M et N se déterminent par les conditions

(*) Ces formules ont été trouvées en premier par Gauss dans un Mémoire sur la chute des graves, puis par Poisson dans son Mémoire sur le mouvement des projectiles publié en 1837.

$y = 0$, $\frac{dy}{dt} = V_y$ pour $t = 0$, ce qui donne

$$N = -\frac{(V_x \sin\lambda - V_z \cos\lambda)}{2\omega},$$

$$M = \frac{V_y + \frac{g\cos\lambda}{2\omega}}{2\omega},$$

par suite

$$y = \frac{V_x \sin\lambda - V_z \cos\lambda}{2\omega}(1 - \cos 2\omega t)$$
$$+ \left(V_y + \frac{g\cos\lambda}{2\omega}\right)\frac{\sin 2\omega t}{2\omega} - \frac{gt\cos\lambda}{2\omega}.$$

La formule (a') donne enfin

$$x = V_x t - 2\omega \sin\lambda \left[\frac{V_x \sin\lambda - V_z \cos\lambda}{2\omega}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4\omega^2}\left(V_y + \frac{g\cos\lambda}{2\omega}\right)(1 - \cos 2\omega t) - \frac{gt^2\cos\lambda}{4\omega}\right]$$

et (d)

$$z = V_z t + \frac{gt^2}{2} + 2\omega\cos\lambda \left[\frac{V_x \sin\lambda - V_z \cos\lambda}{2\omega}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{4\omega^2}\left(V_y + \frac{g\cos\lambda}{2\omega}\right)(1 - \cos 2\omega t) - \frac{gt^2\cos\lambda}{4\omega}\right].$$

Dans le cas d'une vitesse angulaire très-petite comme celle de la terre, on peut négliger pour un temps très-court le carré de ω, et l'on a

$$y = V_y t + (V_x \sin\lambda - V_z \cos\lambda)\omega t^2 - \frac{1}{3}\omega\cos\lambda\, gt^3,$$
$$x = V_x t - \omega \sin\lambda V_y t^2,$$
$$z = V_z t + \frac{gt^2}{2} + \omega\cos\lambda V_y t^2.$$

Si l'on suppose $V_y = 0$, $V_x = 0$, $V_z = 0$ on retrouve les résultats trouvés plus haut relatifs à la chute des graves.

160. *Application des théorèmes sur les accélérations apparentes à la recherche de la courbure de quelques courbes.* — Si l'on renverse l'énoncé du théorème du n° 151, on a le suivant :

L'accélération absolue est la résultante des accélérations relatives et d'entraînement, et d'une accélération égale au double produit de la vitesse angulaire instantanée par la projection de la vitesse relative sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané et dirigée suivant cette projection à laquelle on aurait fait subir un quart de révolution dans le sens de la vitesse angulaire.

Ce théorème permet de construire très-facilement le rayon de courbure de certaines courbes susceptibles d'une définition géométrique. Supposons, par exemple, que l'on veuille déterminer le rayon de courbure de la ligne décrite dans l'espace par un point mobile assujetti à se mouvoir uniformément sur une courbe donnée plane ou gauche, qui tourne elle-même d'un mouvement uniforme autour d'un axe.

Soient r la distance variable du mobile à l'axe de rotation ; ρ le rayon de courbure de la ligne mobile ; V_r la vitesse relative ; V'_r la projection de V_r sur un plan perpendiculaire à l'axe ; ω la vitesse angulaire d'entraînement ; Γ le rayon de courbure de la trajectoire dans l'espace absolu.

La direction de la tangente à cette courbe sera celle de la diagonale V du parallélogramme construit sur V_r et sur la vitesse de rotation ωr. Cette construction, ainsi que les suivantes, seront supposées exécutées sur deux plans de projection dont l'un sera, par exemple, perpendiculaire à l'axe de rotation.

L'accélération absolue se composera de l'accélération d'entraînement $\omega^2 r$, de l'accélération relative $\frac{V_r^2}{\rho}$, et de l'accélération $2\omega V'_r$ dirigée suivant V'_r à laquelle on au-

rait fait subir un quart de révolution dans le sens de ω. Une construction géométrique donnera l'accélération tangentielle φ_t, puis la grandeur et la direction de l'accélération normale φ_n. On aura ainsi la direction du rayon de courbure Γ dont la longueur sera donnée par la relation

$$\frac{V^2}{\Gamma} = \varphi_n,$$

d'où

$$\Gamma = \frac{V^2}{\varphi_n};$$

expression que l'on construira facilement.

Cette construction générale permet de trouver, comme cas particulier, le rayon de courbure de la spirale d'Archimède dont nous nous sommes déjà occupés; et l'on reconnaîtra sans peine que les constructions auxquelles on arrive ainsi par deux voies différentes sont identiques.

La *spirale logarithmique* peut être considérée comme décrite par un point mobile qui glisse d'un mouvement relatif sur le rayon vecteur avec une vitesse proportionnelle à ce rayon r, tandis que celui-ci tourne d'un mouvement uniforme autour du pôle.

Soient ω la vitesse angulaire du rayon vecteur, α l'angle qu'il forme avec la normale, m le rapport constant entre la vitesse relative V_r suivant le rayon vecteur et la longueur de ce rayon; la composition des vitesses donne

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{m}{\omega}, \quad V = r\sqrt{\omega^2 + m^2}.$$

De ce que $\frac{dr}{dt} = V_r = mr$, on déduit

$$\varphi_r = \frac{dV_r}{dt} = m^2 r.$$

La résultante des accélérations relative et d'entraîne-

ment, toutes deux dirigées suivant le rayon vecteur, est $r(\omega^2 - m^2)$, et comme l'accélération centrifuge composée, prise en sens inverse, est dirigée suivant la vitesse rotatoire ωr, on a pour l'accélération normale

$$\begin{aligned}\frac{V^2}{\rho} &= r(\omega^2 - m^2)\cos\alpha + 2\omega m r \sin\alpha \\ &= r\cos\alpha(\omega^2 - m^2 + 2\omega m \operatorname{tang}\alpha) \\ &= r\cos\alpha(\omega^2 + m^2),\end{aligned}$$

d'où

$$\rho = \frac{r}{\cos\alpha}.$$

Donc *dans la spirale logarithmique le rayon de courbure est égal à la normale.*

On peut construire par le même procédé le rayon de courbure de la cycloïde, des épicycloïdes, etc.

161. *Application de la théorie du mouvement relatif à la recherche de propriétés relatives à la courbure des surfaces.* — 1° *De l'indicatrice.* — Soient AB, AC, deux courbes planes passant par un même point A, perpendiculaires entre elles, et dont les plans sont normaux à celui de leurs tangentes Ax, Ay; Az l'intersection des plans des courbes; ρ_r, ρ_e les rayons de courbure de ces lignes au point A.

Concevons qu'un point mobile m parcoure d'un mouvement relatif la courbe AB, tandis que celle-ci se déplace avec un système invariable (S) dont elle est censée faire partie, de manière que son point A se meuve sur AC avec la vitesse d'entraînement V_e.

Soient pour le point A, V_r la vitesse relative de m; φ_r, φ_e les accélérations tangentielle, relative et d'entraînement; m, n, p, les composantes de la rotation instantanée de (S) suivant Ax, Ay, Az; V_a la vitesse absolue du point m; φ_a son accélération tangentielle; α l'angle formé

par V_a avec V_e ou Ay; ρ_a le rayon de courbure de la trajectoire dans le mouvement absolu. On a

$$(a) \qquad \begin{cases} V_\varphi = \dfrac{V_e}{\cos\alpha}, \\ V_r = V_e \operatorname{tang}\alpha. \end{cases}$$

En modifiant les éléments du mouvement relatif, on fera varier la nature de la trajectoire AD dans l'espace absolu sur la surface engendrée par AB.

L'accélération centrifuge composée prise en sens inverse a pour composantes

$$-2pV_r = -2pV_e \operatorname{tang}\alpha \quad \text{suivant } Ay,$$

$$2nV_r = 2nV_e \operatorname{tang}\alpha \quad \text{suivant } Az.$$

On a d'ailleurs, suivant Az, les accélérations normales d'entraînement et relative $\dfrac{V_e^2}{\rho_e}$, $\dfrac{V_r^2}{\rho_r}$.

La composante tangentielle de l'accélération absolue est

$$(b) \qquad \varphi_a = (\varphi_e - 2pV_e \operatorname{tang}\alpha)\cos\alpha + \varphi_r \sin\alpha.$$

La composante normale à V_a, située dans le plan xAy, a pour expression

$$(c) \qquad (\varphi_e - 2pV_e \operatorname{tang}\alpha)\sin\alpha - \varphi_r \cos\alpha.$$

Enfin on a, pour la composante suivant Az de l'accélération normale,

$$(d) \qquad \frac{V_e^2}{\rho_e} + \frac{V_r^2}{\rho_r} + 2nV_r.$$

Pour que le plan osculateur en A à la courbe AD soit normal à la surface, il faut que la composante (c) soit nulle

ou que

$$(e)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi_r = \operatorname{tang}\alpha\,(\varphi_e - 2p\,V_e \operatorname{tang}\alpha), \\ \text{d'où} \\ \varphi_a = \dfrac{\varphi_e - 2p\,V_e \operatorname{tang}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\varphi_r}{\sin\alpha}, \end{array}\right.$$

et dans ce cas on a

$$\frac{V_a^2}{\rho_a} = \frac{V_e^2}{\rho_e} + \frac{V_r^2}{\rho_r} + 2nV_r,$$

ou, eu égard aux valeurs (a),

$$(f)\qquad \frac{1}{\rho_a} = \frac{\cos^2\alpha}{\rho_e} + \frac{\sin^2\alpha}{\rho_r} + \frac{2n}{V_e}\sin\alpha\cos\alpha,$$

Soient x, y les coordonnées du point situé sur le prolongement de V_a à la distance $\sqrt{\rho_a}$ du point A, on a

$$\cos\alpha = \frac{y}{\sqrt{\rho_a}}, \quad \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{\rho_a}},$$

$$(g)\qquad 1 = \frac{y^2}{\rho_e} + \frac{x^2}{\rho_r} + \frac{2n}{V_e}xy,$$

équation d'une section conique dont les grands axes correspondent aux *sections principales* de la surface, pour lesquelles le rayon de courbure est un maximum et un minimum. Cette ellipse correspond à l'indicatrice de M. Ch. Dupin.

Les formules (f) *et* (g) *sont applicables à toute surface* (σ) *dont* AB, AC *seraient deux sections normales à angle droit.* — En effet, remarquons en premier lieu que la condition (e) est remplie en supposant $\varphi_e = 0$, $p = 0$; et que l'on peut prendre $m = 0$, de sorte que le plan de AB peut être considéré comme se mouvant parallèlement à lui-même. Cela posé, soient A_1 le point de AC situé à la distance

$$AA_1 = V_e dt = ds$$

de A; A_1B_1 la section de la surface (σ), parallèle au plan

à ABz, correspondant au point A_1; $d\varepsilon$ l'angle formé par la tangente en A_1 à A_1B_1 avec Ax. Si l'on prend $ndt = d\varepsilon$, il est clair que AB deviendra tangente en A_1 à A_1B_1. D'ailleurs les angles de contingence en A et A_1 à AB, A_1B_1 ne diffèrent entre eux que d'un infiniment petit, c'est-à-dire d'une quantité du second ordre. De sorte que AB au bout du temps dt aura un contact du second ordre avec A_1B_1, et l'on en déduit par un raisonnement simple que la courbure de AD au point A est la même que celle de la section normale à la surface proposée menée suivant la direction de sa tangente en A.

On peut d'ailleurs faire disparaître dans (f) les éléments du mouvement en remarquant que

$$\frac{n}{V_e} = \frac{ndt}{V_e dt} = \frac{d\varepsilon}{ds}.$$

Pour trouver le rayon de courbure d'une section oblique menée, par exemple, suivant Ay, nous supposerons $V_r = 0$, ou $\alpha = 0$, φ_e et φ_r étant différents de zéro. L'accélération normale se compose de $\frac{V_e^2}{\rho_e}$ suivant ρ_e et de φ_r suivant Ax. Appelant θ l'angle formé par le plan osculateur de la trajectoire avec le plan yAz, la composante de l'accélération normale suivant Az étant $\frac{V_a^2}{\rho_a} = \frac{V_e^2}{\rho_a}\cos\theta$, il vient

$$\frac{V_e^2}{\rho_a}\cos\theta = \frac{V_e^2}{\rho_e},$$

d'où

$$\rho_a = \rho_e \cos\theta,$$

ce qui donne le théorème de Meusnier.

2° *De l'inflexion des surfaces.* — On peut considérer ndt ou $d\varepsilon$ comme mesurant la quantité dont *s'infléchit* la surface lorsqu'on parcourt le chemin $V_e dt$; l'*inflexion* $d\varepsilon$, rapportée à l'unité de longueur de chemin ou

$$\frac{ndt}{V_e dt} = \frac{n}{V_e} = \frac{d\varepsilon}{ds}$$

étant représentée par $\frac{1}{D}$, D sera une longueur que nous appellerons le *rayon d'inflexion* de la surface au point A suivant la direction de Ax, par assimilation avec ce que nous avons désigné (p. 132) sous le nom de *rayon de cambrure* des courbes non planes.

On reconnaîtra sans peine que $d\varepsilon$ mesure aussi l'angle que forme la normale en un point de la surface, avec le plan déterminé par ce point et par la normale au point infiniment voisin du précédent, dont la position est déterminée par la grandeur et la direction de ds.

La longueur D représente également le rayon d'inflexion correspondant à Ay; car on doit arriver à la même formule (g) indépendamment de l'hypothèse faite sur celle des deux courbes AB et AC que l'on suppose mobile dans le mode de génération de la surface. On voit ainsi que l'inflexion est la même pour deux directions rectangulaires.

Si la surface s'abaisse au-dessous du plan tangent d'un côté de Ax, elle se relève de l'autre côté, et l'on peut considérer les deux portions de la surface comme présentant des inflexions égales et de signes contraires.

Si nous supposons que l'indicatrice soit rapportée à ses axes principaux, son équation sera

$$1 = \frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R'},$$

R, R′ désignant les rayons de courbure principaux de la surface.

En rapportant cette courbe à deux diamètres rectangulaires Ax', Ay' faisant respectivement l'angle α avec Ax et Ay, l'équation précédente devient

$$1 = y'^2\left(\frac{1}{R}\sin^2\alpha + \frac{1}{R'}\cos^2\alpha\right) + x'^2\left(\frac{1}{R}\cos^2\alpha + \frac{1}{R'}\sin^2\alpha\right)$$
$$- 2x'y'\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

Cette équation, comparée à l'équation (g), montre que

l'inflexion suivant Ax' ou Ay' est représentée par

$$\frac{1}{D} = \sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right).$$

Il suit de là que l'inflexion est de même sens ou de même signe pour les angles droits opposés par le sommet, déterminés par les sections principales, et de sens contraire pour deux angles adjacents. Le maximum de l'inflexion mesurée par la différence algébrique des inverses des rayons de courbure principaux, correspond aux bissectrices des mêmes angles.

Pour nous faire une idée nette de la manière dont la surface s'infléchit autour de l'un de ses points, nous chercherons la forme qu'affecte la courbe déterminée dans cette surface par un cylindre droit d'un rayon infiniment petit ζ, ayant pour axe la normale au point considéré. On a, en appelant z l'ordonnée de la courbe, parallèle à la normale, z_0 sa valeur correspondant à $\alpha = 0$,

$$\frac{dz}{\zeta d\alpha} = \zeta\sin\alpha\cos\alpha\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right),$$

d'où

$$z - z_0 = \zeta^2\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)\frac{\sin^2\alpha}{2}.$$

Or

$$\zeta^2 = 2Rz,$$

par suite

$$z = \frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{1}{R'}\sin^2\alpha + \frac{1}{R}\cos^2\alpha\right).$$

Concevons maintenant que l'on développe le cylindre sur un plan, et appelons u l'abscisse de la courbe développée estimée suivant le développement de l'intersection du cylindre par le plan tangent à la surface. On a

$$z = \frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{1}{R'}\sin^2\frac{u}{\zeta} + \frac{1}{R}\cos^2\frac{u}{\zeta}\right) = \frac{\zeta^2}{4}\left[\frac{1}{R'} + \frac{1}{R} + \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\cos 2\frac{u}{\zeta}\right],$$

équation qui représente une courbe appartenant à la classe

des sinusoïdes, dont les points maxima et minima correspondent aux sections principales de la surface. A égale distance entre un point maximum et un point minimum consécutifs, la courbe présente un point d'inflexion; enfin elle est située tout entière d'un même côté de l'axe des u si R et R′ sont de même signe, ou si la courbure de la surface a le même sens tout autour du point considéré; dans le cas contraire, elle coupe l'axe des u, comme il est facile de le reconnaître, aux points qui correspondent aux asymptotes de l'indicatrice.

3° *Du rayon de cambrure des lignes asymptotiques.* — Supposons que, la surface étant à courbures opposées, Ay soit l'une des directions pour laquelle le rayon de courbure est infini; l'équation (f) devient

$$\frac{1}{\rho_a} = \frac{1}{\rho_r}\sin^2\alpha + \frac{2}{D}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Or le plan tangent yOx détermine dans la surface une ligne *asymptotique* tangente à Ay et dont par conséquent le rayon de courbure est dirigé suivant Ax. Soient $d\eta$ et τ l'angle et le rayon de cambrure de la ligne asymptotique au point A, et considérons à partir du même point trois éléments consécutifs, supposés égaux à ds de cette même courbe; on a $\tau = \frac{ds}{d\eta}$, et l'on reconnaît sans peine que l'angle formé par la normale correspondant au troisième élément ou à $2\,ds$ est égal à $d\eta$; d'où il suit que $D = \frac{2\,ds}{d\eta} = 2\tau$.

Si δ est l'angle des asymptotes de l'indicatrice, ou la valeur de β correspondant à $\rho_a = \infty$, il vient

$$\operatorname{tang}\delta = -\frac{2\rho_r}{D} = -\frac{\rho_r}{\tau},$$

et par suite

$$\frac{1}{\rho_a} = \frac{\sin\alpha}{\rho_r}\,\frac{\sin(\alpha-\delta)}{\cos\delta}.$$

Or, en désignant par m la puissance de l'indicatrice, son équation polaire correspond à

$$\frac{1}{\rho_a} = \frac{1}{m} \frac{\sin(\delta - \alpha)}{\sin^2\delta} \sin\alpha.$$

De la comparaison de ces deux équations, on déduit

$$m \sin\delta = -\rho_r \cot\delta,$$

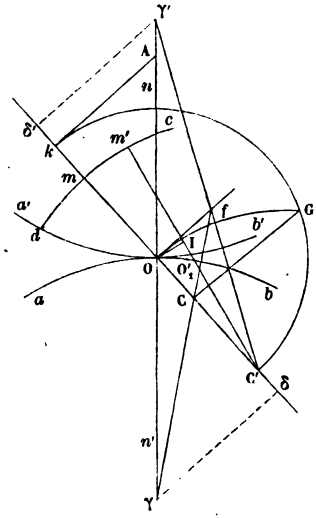
d'où

$$\tau = m \sin\delta,$$

résultat auquel nous sommes parvenus d'une autre manière au n° 110, p. 152.

162. *Du rayon de courbure de l'enveloppe d'une courbe plane mobile dans son plan suivant une loi géométrique.* — Soient cd (*fig.* 63) la courbe mobile dans une position quelconque; O le centre instantané de rotation de la figure invariable dont elle est censée faire partie; $Om = p$ la normale abaissée du point O sur cd; ab, $a'b'$, les lieux géométriques des centres instantanés sur le plan considéré comme fixe et sur celui de la figure. On sait que ces deux lignes sont tangentes au point O et qu'elles roulent l'une sur l'autre.

Fig. 63.



Soient O'_1 le point de ab qui doit devenir le centre instantané au bout du temps dt; $O'_1 m'$ la normale abaissée de ce point sur cd; C' le point de rencontre de mO, $m'O'_1$ ou le centre de courbure de cd correspondant au point m;

$mC' = \rho'$ le rayon de courbure correspondant ; $n\mathrm{O}n'$ la normale en O à ab, $a'b'$; α l'angle $m\mathrm{O}n$ formé par $\mathrm{O}m$ avec $n\mathrm{O}$; A le centre, supposé connu, des accélérations de la figure mobile, situé sur $\mathrm{O}n$ dans l'hypothèse d'une rotation instantanée constante ω ; on a (119)

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{OO}_1}{dt}, \quad \mathrm{OA} = \frac{\mathrm{U}}{\omega}.$$

On sait que le point m est le point de la courbe enveloppe correspondant à la position cd de la courbe mobile ; et de plus, il est clair que la courbe enveloppe peut être considérée comme engendrée par un point m entraîné dans le mouvement général de la figure, par rapport à laquelle il décrirait d'un mouvement relatif la courbe cd avec la vitesse $w = \frac{mm'}{dt}$.

L'accélération du point m dans le mouvement absolu se compose de l'accélération centripète $\omega^2 p$ dirigée de m vers O, de l'accélération $\omega\mathrm{U}$ (117) dirigée suivant la normale $\mathrm{O}n$, de la composante normale $\frac{w^2}{\rho'}$ de l'accélération relative dirigée de m vers C', et de l'accélération relative tangentielle dont nous n'avons pas à nous occuper, attendu qu'elle ne donne aucune composante normale à la trajectoire de m dans le mouvement absolu ; enfin de l'accélération centrifuge composée $2\omega w$ dirigée suivant le prolongement $\mathrm{O}n'$ de $\mathrm{O}n$.

En désignant par ρ le rayon de courbure de l'enveloppe, et remarquant que la vitesse absolue du point m est $w + \omega p$, on a, pour la valeur de l'accélération normale dans le mouvement absolu,

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{(w + \omega p)^2}{\rho} = \omega^2 p - \omega \mathrm{U} \cos\alpha + 2\omega w + \frac{w^2}{\rho'}.$$

Soit OI la perpendiculaire abaissée du point O sur $m'\mathrm{C}'$, on

a évidemment

$$OI = OO'_1 \cos\alpha = U\,dt \cos\alpha,$$

$$mm' = OI \cdot \frac{\rho'}{\rho' - p},$$

d'où

$$(\alpha) \qquad w = U \cos\alpha \cdot \frac{\rho'}{\rho' - p},$$

$$U \cos\alpha = \frac{\rho' - p}{\rho'} \cdot w.$$

En remplaçant $U \cos\alpha$ par cette valeur dans l'équation (A), on trouve

$$\frac{(\omega p + w)^2}{\rho} = \omega(\omega p + w) + \frac{w}{\rho'}(\omega p + w),$$

par suite

$$\frac{\omega p + w}{\rho} = \omega + \frac{w}{\rho'},$$

et en remplaçant w par sa valeur (α) en fonction de U,

$$(B) \qquad \frac{\omega}{U} = \left(\frac{1}{\rho - p} - \frac{1}{\rho' - p}\right) \cos\alpha = \frac{1}{AO}.$$

Dans le cas de la figure, ρ' doit être considéré comme étant de même signe que p; si cd, au lieu d'être concave relativement au point O, était convexe, il faudrait remplacer ρ' par $-\rho'$. La valeur positive ou négative de ρ tirée de cette dernière équation indiquera que ce rayon est de même sens que p ou de sens contraire.

Il est maintenant très-facile de déterminer le centre de courbure O de la courbe enveloppe. Soit k la projection de A sur la normale Am. On a

$$Ok = AO \cos\alpha,$$

$$OC' = \rho' - p,$$

et d'après la formule (B)

$$\frac{1}{\rho - p} = \frac{1}{Ok} + \frac{1}{OC},$$

d'où

$$\rho - p = \frac{OK.OC'}{OK + OC'} = OC' - \frac{OC'^2}{OK + OC'} = OC,$$

et le centre de courbure cherché C sera la projection sur $C'm$ des points de rencontre de la circonférence décrite sur $O'k$ comme diamètre avec la circonférence de centre C' et de rayon OC'.

Si le mouvement de la courbe mobile est produit par le roulement des deux lignes $a'b'$, ab, supposées données, l'une sur l'autre, on peut substituer (122) à la formule (B) la suivante :

$$\text{(C)} \qquad \frac{1}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma'} = \left(\frac{1}{\rho - p} - \frac{1}{\rho' - p}\right) \cos\alpha.$$

Cette formule, notamment applicable au problème des engrenages, est due à Savary, qui y est arrivé par d'autres considérations, et d'où il a déduit la construction suivante : Soient γ' et γ les centres de courbure de $a'b'$, ab; f le point d'intersection de la perpendiculaire en O à la normale Om avec $C'\gamma'$; le point de rencontre de γf avec la direction de Om détermine le centre de courbure cherché C. En effet, soient δ' et δ les projections de γ' et γ sur la normale Om; on a par la similitude des triangles fOC', $\delta'\gamma'C'$

$$Of = \frac{\gamma'\delta'.O'C'}{C'\delta'} = \frac{\Gamma' \sin\alpha\,(\rho' - p)}{\rho' - p + \Gamma' \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\frac{1}{\Gamma'} + \frac{1}{\rho' - p}\cos\alpha}.$$

On trouverait de même

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{\Gamma} - \frac{1}{\rho - p}\cos\alpha}$$

pour la portion de la droite Of déterminée par fC; et en vertu de la relation (C), ces deux valeurs sont égales.

Il est clair que la vitesse w_1 du point m sur la courbe enveloppe sera donnée par une formule semblable à (α), et aura pour expression

$$w_1 = \mathrm{U}\cos\alpha\,\frac{\rho}{\rho - p}.$$

Le glissement élémentaire $d\Delta$ des deux courbes l'une sur l'autre est par suite représenté par

$$d\Delta = (w - w_1)\,dt = \mathrm{U}\cos\alpha\left(\frac{\rho'}{\rho' - p} - \frac{\rho}{\rho - p}\right)dt$$
$$= \mathrm{U}\cos\alpha\left(\frac{1}{\rho' - p} - \frac{1}{\rho - p}\right)p\,dt,$$

ou, eu égard à (B),

$$d\Delta = p\,\omega\,dt.$$

Dans le cas où le mouvement résulte du roulement de deux courbes l'une sur l'autre, on a, en appelant ds l'élément Udt décrit dans le temps dt par le point de contact des deux courbes,

$$\frac{\omega}{\mathrm{U}} = \left(\frac{1}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma'}\right),$$

d'où

$$\omega\,dt = \left(\frac{1}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma'}\right)ds,$$

et enfin

$$d\Delta = p\left(\frac{1}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma'}\right)ds,$$

expression identique à celle que nous avons trouvée pour les engrenages cylindriques (105).

163. *De la tangente et du rayon de courbure en un point du lieu des positions successives du centre de cour-*

bure d'une courbe qui roule sur une courbe fixe. — Désignons par (A) et (B) la courbe fixe et la courbe mobile; et soient

$d\alpha$, $d\alpha'$ les angles de contingence de (A) et (B) en leur point de contact;

ds leur élément commun;

$\rho = \frac{ds}{d\alpha}$, $\rho' = \frac{ds}{d\alpha'}$ les rayons de courbure correspondants;

$\gamma = \frac{d\rho}{d\alpha}$, $\gamma' = \frac{d\rho'}{d\alpha'}$ les rayons de courbure des développées de (A) et (B);

$\gamma_1 = \frac{d\gamma}{d\alpha}$ le rayon de courbure de la seconde développée de (A);

ω la vitesse angulaire instantanée de (A), que nous pouvons supposer constante.

Le lieu décrit par les centres successifs de courbure de (A), correspondant aux points de contact avec (B), peut être considéré comme étant la trajectoire dans l'espace absolu d'un point mobile entraîné dans le mouvement de roulement de (A) et décrivant sa développée d'un mouvement relatif avec la vitesse $\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \gamma \frac{d\alpha}{dt}$.

D'autre part, en supposant, pour fixer les idées, que les deux courbes opposent leurs convexités, on a

$$\omega = \frac{d\alpha + d\alpha'}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\left(1 + \frac{d\alpha'}{d\alpha}\right) = \frac{d\alpha}{dt}\left(1 + \frac{\rho}{\rho'}\right),$$

et la vitesse d'entraînement est par suite

$$\omega\rho = \frac{d\alpha}{dt}\left(1 + \frac{\rho}{\rho'}\right)\rho.$$

Il suit de là et de la composition des vitesses, que la nor-

male au lieu décrit sera parallèle à la droite qui joint le centre de courbure de la développée de (A) au point obtenu en portant, à partir du point de contact, sur la normale commune et en allant vers le centre de courbure de (B), une longueur égale à $\frac{\rho^2}{\rho'}$. Si nous représentons par δ la longueur de cette droite, égale à $\sqrt{\gamma^2 + \left(\rho + \frac{\rho^2}{\rho'}\right)^2}$, la vitesse absolue du mobile sera

$$\delta \cdot \frac{d\alpha}{dt}.$$

Pour trouver le rayon de courbure, nous remarquerons que l'accélération d'entraînement est la résultante de $-\omega^2\rho$, $\omega\frac{ds}{dt} = \omega\rho\frac{d\alpha}{dt}$ (117), toutes deux dirigées suivant ρ en allant du point de contact vers le centre de courbure de (A); que l'accélération relative a pour composantes $\frac{d}{dt}\left(\gamma\frac{d\alpha}{dt}\right)$, suivant la même direction, et $-\gamma\frac{d\alpha^2}{dt^2}$, suivant la tangente commune à (A) et (B), et enfin que l'accélération centrifuge composée prise en sens inverse, représentée par $-2\omega\gamma\frac{d\alpha}{dt}$, a la même direction que les trois premières des composantes ci-dessus.

Il suit de là, en désignant par x le rayon de courbure de la trajectoire, que l'accélération normale dans le mouvement absolu, égale à la projection de ces diverses accélérations sur la direction de δ, a pour expression

$$\frac{\delta^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2}{x} = \left[-\omega^2\rho + \omega\rho\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\gamma\frac{d\alpha}{dt}\right) - 2\omega\gamma\frac{d\alpha}{dt}\right]\frac{\left(1+\frac{\rho}{\rho'}\right)\rho}{\delta}$$
$$+\gamma\frac{d\alpha^2}{dt^2}\cdot\frac{\gamma}{\delta},$$

d'où

$$(a)\quad x=\frac{\delta^3\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^3}{\left[-\omega^2\rho+\omega\rho\frac{d\alpha}{dt}+\frac{d}{dt}\left(\gamma\frac{d\alpha}{dt}\right)-2\omega\gamma\frac{d\alpha}{dt}\right]\left(1+\frac{\rho}{\rho'}\right)\rho+\gamma^2\frac{d\alpha^2}{dt^2}}.$$

Or on a

$$\frac{d\alpha}{dt}=\omega\frac{\rho'}{\rho+\rho'},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\omega\frac{\left(\rho\frac{d\rho'}{dt}-\rho'\frac{d\rho}{dt}\right)}{(\rho+\rho')^2}=\omega\frac{\left(\rho\frac{d\rho'}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{d\alpha}-\rho'\frac{d\rho}{d\alpha}\right)\frac{d\alpha}{dt}}{(\rho+\rho')^2},$$

ou

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=\omega\frac{(\rho^2\gamma'-\rho'^2\gamma)}{\rho'(\rho^2+\rho')^2}=\frac{(\rho^2\gamma'-\rho'^2\gamma)}{\rho'^3(\rho+\rho')}\frac{d\alpha^2}{dt^2},$$

par suite

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma\frac{d\alpha}{dt}\right)=\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{d\gamma}{dt}=\gamma\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{d\alpha^2}{dt^2}\cdot\frac{d\gamma}{d\alpha}$$

$$=\frac{d\alpha^2}{dt^2}\left[\frac{(\rho^2\gamma'-\rho'^2\gamma)\gamma}{\rho'^3(\rho+\rho')}+\gamma_1\right].$$

En ayant égard à cette valeur et à celle de ω en fonction de $\frac{d\alpha}{dt}$, la formule (a) devient

$$x=\frac{\delta^3}{\frac{\rho+\rho'}{\rho'}\left[-\frac{(\rho+\rho')}{\rho'}\frac{\rho^3}{\rho'}-2\gamma\frac{(\rho+\rho')}{\rho'}\rho+\gamma_1\rho\right]+\gamma^2+\frac{(\rho^3\gamma'-\rho'^2\gamma)\gamma\rho}{\rho'^3}}.$$

Le sens du rayon de courbure sera indiqué par le signe du dénominateur de cette expression que l'on pourra construire géométriquement. En changeant ρ' en $-\rho'$ dans cette formule, on aura celle qui est relative au cas où les courbes (A) et (B) seraient intérieures l'une à l'autre aux environs du point de contact.

Si la courbe (A) roule sur une droite, ρ' est infini, γ' est nul, et il vient tout simplement

$$x = \frac{\delta^3}{\gamma^2 - \rho(2\gamma - \gamma_1)} = \frac{(\gamma^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\gamma^2 - \rho(2\gamma - \gamma_1)}$$

pour le rayon de courbure du lieu géométrique (*).

164. *De la courbure dans les engrenages coniques.* — Soient (*fig.* 58, p. 195) S le sommet des cônes primitifs roulant l'un sur l'autre; Sz leur arête de contact; Sm l'arête de contact des surfaces qui limitent les dents. Concevons, comme au n° **132**, une sphère de rayon i ayant son centre en S. Elle déterminera dans les surfaces des dents deux courbes sphériques (s), (s'), dont l'une sera l'enveloppe de la position de l'autre supposée donnée. Proposons-nous de déterminer le rayon de courbure ρ de l'enveloppe (s), connaissant le rayon de courbure ρ' de (s'), et sa direction mI$'$, comprise, ainsi que celle de ρ, dans le plan normal mSz aux deux courbes.

Soient γ l'angle mSz formé par l'arête de contact des dents avec celles des cônes; δ' l'angle mIz formé par ρ' avec Sz; mp la perpendiculaire abaissée du point m sur Sz.

On peut considérer la courbe enveloppe comme engendrée par un point m entraîné dans le mouvement du cône mobile, par rapport auquel il décrirait (s') d'un mouvement relatif.

Appelant w la vitesse relative du point m, l'accélération centrifuge composée est dirigée suivant mp, et est représentée par $2\omega w$.

(*) *Voyez*, pour plus de détails sur cette intéressante question, un Mémoire de M. Mannheim, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. IV, 1859.

L'accélération relative normale a pour composantes

$$\frac{w^2}{\rho'}\sin\delta' \quad \text{suivant} \quad mp,$$

$$-\frac{w^2}{\rho'}\cos\delta' \quad \text{suivant} \quad Sz.$$

L'accélération relative tangentielle ne donnant aucune composante dans le plan mSz, il est inutile de nous en occuper.

En nous reportant au n° 132, dont nous conservons les notations, l'accélération d'entraînement a pour composantes

$$\omega^2 i\left(\sin\gamma - \frac{\alpha}{\omega^2}\cos\varepsilon\cos\gamma\right) \quad \text{suivant} \quad mp,$$

$$-\alpha i\cos\varepsilon\sin\gamma \quad \text{suivant} \quad Sz.$$

D'où l'on déduit pour les composantes de l'accélération normale du point m, dans son mouvement absolu,

$$\omega^2 i\left(\sin\gamma - \frac{\alpha}{\omega^2}\cos\varepsilon\cos\gamma\right) + \frac{w^2}{\rho'}\sin\delta' + 2\omega w \quad \text{suivant} \quad mp,$$

$$-\alpha i\cos\varepsilon\sin\gamma - \frac{w^2}{\rho'}\cos\delta' \quad \text{suivant} \quad Sz,$$

d'où, en appelant δ l'angle que forme avec Sz la direction du rayon de courbure ρ de la courbe enveloppe,

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{i\sin\gamma - \frac{\alpha}{\omega^2}i\cos\varepsilon.\cos\gamma + \frac{w^2}{\omega^2}\cdot\frac{1}{\rho'}\sin\delta' + 2\frac{w}{\omega}}{\frac{\alpha}{\omega^2}i\cos\varepsilon\sin\gamma + \frac{w^2}{\omega^2}\cdot\frac{1}{\rho'}\cos\delta'}.$$

Soient m' le point de (s') infiniment voisin de m; $m'I'$ la direction de la normale principale correspondante, rencontrant en I' la génératrice de contact Sz' des deux cônes;

$I'k$, $I'h$, les perpendiculaires abaissées du point I' sur Im et Sz.

On reconnaît facilement que

$$I'k = II'\sin\widehat{mII'}, \quad II' = \frac{I'h}{\sin\widehat{zII'}},$$

$$I'h = \frac{\alpha}{\omega}\,dt.SI,$$

$$mm' = wdt = I'k\,\frac{\rho'}{\rho' - mI},$$

d'où

$$w = \frac{\alpha}{\omega}\cdot\frac{\sin\widehat{mII'}}{\sin\widehat{zII'}}\cdot SI\,\frac{\rho'}{\rho' - mI}.$$

Or l'angle trièdre $mI'z'I$, rectangle suivant mI', donne, par la proportionnalité des sinus des éléments opposés,

$$\frac{\sin\widehat{mII'}}{\sin\widehat{zII'}} = \cos\varepsilon,$$

par suite

$$\frac{w}{\rho'} = \frac{\alpha}{\omega}\cos\varepsilon\cdot\frac{SI}{\rho' - mI}.$$

D'autre part, puisque la courbe (s') est sphérique, on a, d'après le théorème de Meunier,

$$\rho' = i\cos(\delta' - \gamma);$$

de plus,

$$SI = \frac{i\sin(\delta' - \gamma)}{\sin\delta'}, \quad mI = \frac{i\sin\gamma}{\sin\delta'},$$

et la formule ci-dessus donne

$$\frac{w}{\omega}\cdot\frac{1}{\rho'} = \frac{\alpha}{\omega^2}\,\frac{\cos\varepsilon}{\cos\delta'},$$

$$w = \omega\cdot\frac{\alpha}{\omega^2}\cdot\frac{\cos\varepsilon}{\cos\delta'}\,i\cos(\delta' - \gamma).$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $\operatorname{tang}\delta$, on trouve

$$\operatorname{tang}\delta = \operatorname{tang}\delta' + \frac{1}{\frac{\alpha}{\omega^2}\cdot\cos\varepsilon} = \operatorname{tang}\delta' + \frac{\cot\eta}{\cos\varepsilon},$$

et une construction géométrique fera connaître l'angle δ et enfin le rayon de courbure ρ.

La vitesse w_1 du point mobile sur la courbe enveloppe s'obtiendra en changeant δ' en δ dans la valeur ci-dessus de w, et l'on a ainsi

$$w_1 = \frac{\alpha}{\omega} i \cdot \frac{\cos\varepsilon}{\cos\delta} \cos(\delta - \gamma).$$

Le glissement élémentaire de deux courbes est par suite mesuré par

$$d\Delta = \frac{\alpha i}{\omega} \sin\gamma \cos\varepsilon (\operatorname{tang}\delta - \operatorname{tang}\delta') = i\omega \sin\gamma\, dt,$$

formule identique à celle que donne la composition des rotations.

On peut mettre $d\Delta$ sous une autre forme qu'il est utile de connaître dans le calcul de l'effet utile des engrenages (*).

Soient t le point où la perpendiculaire à Sm dans le plan mSz rencontre Sz; n, n', t' les points où la sphère de rayon i coupe les droites Sm, Sm', SI'; Γ, Γ' les rayons de courbure principaux des cônes au point t, correspondant aux angles de contingence $d\chi$, $d\chi'$; on a

$$\omega\, dt = d\chi \pm d\chi' = \left(\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'}\right) tt',$$

$$St = \frac{i}{\cos\gamma}.$$

Si l'on exprime que l'aire nSt est égale à la somme des projections sur son plan, des aires $n'St$, tSt', l'angle $m'St'$

(*) *Voyez* un Mémoire de l'auteur inséré au 33e cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

étant égal à $\gamma + d\gamma$, on trouve que

$$u' = \mathrm{S}t \cdot \frac{d\gamma}{\cos\varepsilon} = i\,\frac{d\gamma}{\cos\gamma\,\cos\varepsilon},$$

et enfin

$$d\Delta = i^2\left(\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'}\right)\frac{\tang\gamma}{\cos\varepsilon}\,d\gamma.$$

§ II. — Propriétés géométriques du mouvement relatif d'un solide par rapport a un milieu mobile.

165. *L'accélération angulaire apparente d'un solide dans son mouvement relatif par rapport à un milieu mobile* (S) *se compose : 1° de l'accélération angulaire absolue ; 2° de l'accélération angulaire d'entraînement prise en sens contraire ; 3° d'une accélération angulaire égale et de sens contraire à la vitesse de rotation d'entraînement de l'extrémité de la droite menée par un point de l'axe instantané de* (S), *qui représente la rotation absolue ou relative du solide.* — Nous donnerons, pour abréger, le nom d'*accélération angulaire composée* à cette dernière accélération.

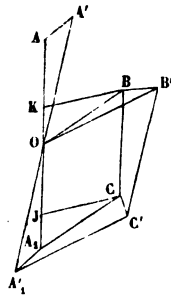
On peut considérer les mouvements absolus de (S) et du corps M comme se composant chacun d'une translation et d'une rotation dont l'axe passe constamment par un même point O, fixe dans l'espace absolu.

Le mouvement relatif de M ne sera pas altéré en imprimant à ce corps ainsi qu'à (S) une translation égale et contraire à celle de ce milieu ; ce qui revient à supposer que (S) est assujetti à tourner autour du point fixe O. Par cette hypothèse, la rotation instantanée de M n'est pas changée, sa translation seule est modifiée ; mais nous n'avons pas à nous en occuper.

Soient (*fig.* 64) OA, OB les axes instantanés de (S) et de M dans l'espace absolu, et supposons que les rota-

tions correspondantes ω_a, ω_e aient lieu de la gauche vers la droite pour l'observateur couché successivement suivant OA et OB en ayant les pieds en O. Je porte sur les directions de ces droites les longueurs $OA = \omega_e$, $OB = \omega_a$; au bout du temps dt, OA et OB auront varié en grandeur et en direction et seront représentées par OA′ et OB′. Les accélérations angulaires α_e, α_a de (S) et de M seront représentées par $\frac{AA'}{dt}$, $\frac{BB'}{dt}$, c'est-à-dire par les vitesses des points A et B dans l'espace.

Fig. 64.



La rotation relative ω s'obtiendra en traçant la diagonale OC du parallélogramme construit sur $OB = \omega_a$, et sur la longueur $OA_1 = \omega_e = OA$ portée sur la direction OA, de l'autre côté du point O, et qui représente la rotation ω_e changée de sens ou de signe.

L'accélération angulaire apparente sera la vitesse relative du point C par rapport au milieu (S).

Soit OC′ la diagonale du parallélogramme construit sur OB_1 et la longueur OA'_1 égale et de sens contraire à OA′; $\frac{CC'}{dt}$ est la vitesse absolue du point C, et elle est évidemment la résultante de $\frac{BB'}{dt}$, $\frac{AA'_1}{dt}$, ou de α_a et $-\alpha_e$.

L'accélération angulaire apparente se composera donc de α_a et $-\alpha_e$, et d'une troisième accélération angulaire égale et contraire à la vitesse d'entraînement du point C.

Soient BK, CJ, les perpendiculaires abaissées des points B et C sur OA; δ_a, δ les angles AOB, AOC : on a

$$CJ = BK = \omega \sin \delta = \omega_a \sin \delta_a,$$

et l'accélération angulaire composée a pour expression

$$\omega_e \omega \sin \delta, \quad \text{ou} \quad \omega_e \omega_a \sin \delta_a.$$

166. *Si l'on considère la rotation d'entraînement et la rotation relative ou absolue du corps comme les résultantes de plusieurs autres, l'accélération angulaire composée est la résultante de celles auxquelles on est conduit en considérant successivement chacune des composantes de la rotation d'entraînement avec chaque composante de la rotation absolue ou relative du corps.* — 1° Supposons que la rotation relative ω se compose de deux autres ω', ω'' dont nous représenterons les projections sur un plan perpendiculaire à ω_e par Ω', Ω'', la lettre Ω représentant la même projection relative à ω.

Les accélérations angulaires composées $\omega_e\Omega$, $\omega_e\,\Omega'_e$, $\omega_e\Omega''$ correspondant à ω, ω', ω'' sont proportionnelles et perpendiculaires à Ω, Ω', Ω''. D'un autre côté, Ω est la diagonale du parallélogramme construit sur Ω', Ω''. Si donc on fait tourner ce parallélogramme de 270° dans le sens de ω_e, ses côtés et sa diagonale représenteront respectivement en grandeur et en direction les accélérations angulaires composées correspondant aux rotations ω, ω', ω'' et le théorème est démontré dans le cas particulier que nous considérons. On l'étendra sans peine au cas où ω se composerait d'un nombre quelconque de rotations. On arriverait au même résultat en considérant la rotation absolue.

2° Supposons maintenant que la rotation d'entraînement se compose de deux autres, ω'_e, ω''_e, dont les projections sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané du corps dans son mouvement absolu ou relatif soient Ω'_e, Ω''_e, la projection analogue de ω_e étant Ω_e. Les accélérations angulaires composées $\omega\Omega_e$, $\omega\Omega'_e$, $\omega\Omega''_e$ correspondant à ω_e, ω'_e, ω''_e, étant proportionnelles et perpendiculaires aux droites qui représentent Ω_e, Ω'_e, Ω''_e, dont la première est la résultante des deux autres, la démonstration s'achèvera comme tout à l'heure, et s'étendra à un nombre quelconque de composantes de la vitesse angulaire d'entraînement.

On déduira sans difficulté des deux cas particuliers que

nous venons d'examiner la généralisation du théorème énoncé.

167. *Relations analytiques entre les accélérations angulaires relative, d'entraînement et absolue du corps assujetti à tourner autour d'un point fixe dans le milieu mobile.* — Soient :

Ox, Oy, Oz, trois axes rectangulaires passant par le point relativement fixe O et entraînés dans le mouvement du corps ;

n_a, p_a, q_a, les composantes parallèles à ces axes de la rotation absolue ω_a ;

n_e, p_e, q_e et n, p, q, les composantes analogues de la rotation d'entraînement ω_e et de la rotation relative ω ;

$\mathcal{A}_x$, $\mathcal{A}_y$, $\mathcal{A}_z$, les composantes parallèles à ces axes de l'accélération angulaire d'entraînement.

Les composantes des accélérations angulaires relative et absolue suivant les axes Ox, Oy, Oz ont respectivement pour valeurs (95), $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ et $\frac{dn_a}{dt}$, $\frac{dp_a}{dt}$, $\frac{dq_a}{dt}$.

Pour estimer la composante suivant Ox de l'accélération angulaire composée $\omega\omega_e \sin(\omega, \omega_e)$, nous appliquerons le théorème du numéro précédent. On reconnaîtra sans difficulté que les rotations d'entraînement n_e, p_e, donnent seules des accélérations angulaires composées dirigées suivant Ox et qui ont pour valeurs respectives $-p_e q$ et $q_e p$. On a par suite

$$\frac{dn}{dt} = \frac{dn_a}{dt} - \mathcal{A}_x + pq_e - p_e q,$$

d'où

$$\frac{dn_a}{dt} = \frac{dn}{dt} + \mathcal{A}_x + p_e q - pq_e,$$

et de même

$$\frac{dp_a}{dt} = \frac{dp}{dt} + \mathcal{A}_y + nq_e - n_e q,$$

$$\frac{dq_a}{dt} = \frac{dq}{dt} + \mathcal{A}_z + n_e p - np_e.$$

En général $\mathcal{A}_x$, $\mathcal{A}_y$, $\mathcal{A}_z$, n_e, p_e, q_e seront donnés par les projections de A et ω_e sur trois axes rectangulaires OX, OY, OZ fixes dans le milieu (S) et que l'on peut supposer menés par le point O. Soient ν_e, ϖ_e, χ_e les composantes de la rotation d'entraînement suivant ces trois axes; les composantes de l'accélération angulaire correspondantes seront $\frac{d\nu_e}{dt}$, $\frac{d\varpi_e}{dt}$, $\frac{d\chi_e}{dt}$, et les formules de transformation des n°s 93 et 97 donnent pour les relations cherchées :

$$\begin{aligned} n_e &= \nu_e(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ &\quad + \varpi_e(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) - \chi_e\sin\theta\sin\psi, \\ p_e &= \nu_e(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) \\ &\quad + \varpi_e(\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) + \chi_e\sin\theta\cos\psi, \\ q_e &= \nu_e\sin\varphi\sin\theta - \varpi_e\cos\varphi\sin\theta + \chi_e\cos\theta, \\ A_x &= \frac{d\nu_e}{dt}(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ &\quad + \frac{d\varpi_e}{dt}(\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) - \frac{d\chi_e}{dt}\sin\theta\sin\chi, \\ A_y &= \frac{d\nu_e}{dt}(\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) \\ &\quad + \frac{d\varpi_e}{dt}(\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) + \frac{d\chi_e}{dt}\sin\theta\cos\psi, \\ A_z &= \frac{d\nu_e}{dt}\sin\varphi\sin\theta - \frac{d\varpi_e}{dt}\cos\varphi\sin\theta + \frac{d\chi_e}{dt}\cos\theta; \end{aligned}$$

On a d'ailleurs, d'après le n° 93,

$$r = \frac{d\theta}{dt},$$

$$s = \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta,$$

$$q = -\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\cos\theta,$$

$$n = r\cos\psi - s\sin\psi = \frac{d\theta}{dt}\cos\psi - \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\sin\psi,$$

$$p = r\sin\psi + s\cos\psi = \frac{d\theta}{dt}\sin\psi + \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\cos\psi,$$

$$q = -\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\cos\theta \text{ (*)}.$$

(*) *Voyez* la Note V placée à la fin du volume, pour l'application de ces différentes formules au mouvement relatif d'un corps solide.

CHAPITRE SIXIÈME.

DE LA SURACCÉLÉRATION.

168. Nous désignerons sous le nom de SURACCÉLÉRATION la dérivée *géométrique* (30) par rapport au temps de l'accélération.

La suraccélération n'est ainsi que l'accélération de l'accélération considérée comme vitesse, ce qui justifie la nouvelle dénomination que nous adoptons.

Il est clair que les suraccélérations se composent comme les vitesses et les accélérations, et que, en projection sur une droite ou sur un plan, elles jouissent des mêmes propriétés que ces dernières; d'où l'on déduit, entre autres choses, que la projection de la suraccélération sur une droite est la dérivée seconde de la vitesse projetée sur cette droite.

§ Ier. — DE LA SURACCÉLÉRATION DANS LE MOUVEMENT D'UN POINT.

169. Soient ds l'élément de chemin décrit dans le temps dt par un point mobile; $v = \frac{ds}{dt}$ la vitesse correspondante; ρ, ρ_1 les rayons de courbure et de cambrure de la trajectoire; $d\alpha$, $d\varepsilon$ les angles de contingence et de cambrure; on a

$$\rho = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{v}{\frac{d\alpha}{dt}},$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v}{\rho},$$

et de même

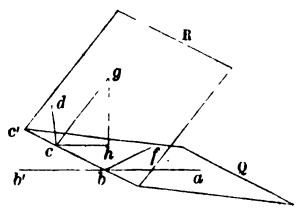
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v}{\rho_1}.$$

Nous appellerons avec M. de Saint-Venant la *binormale* à une courbe la normale perpendiculaire au plan osculateur.

L'accélération tangentielle $\frac{dV}{dt}$ donne lieu aux suraccélérations $\frac{d^2V}{dt^2}$, $\frac{dV}{dt}\cdot\frac{d\alpha}{dt} = \frac{V}{\rho}\cdot\frac{dV}{dt}$, dirigées respectivement suivant la tangente et le rayon de courbure.

Soient maintenant (*fig.* 65) *ab*, *bc*, *cd* trois éléments consécutifs de la trajectoire; Q, R les deux plans osculateurs *abc*, *bcd*, qui se coupent suivant *bc*; *bf* le rayon de courbure ρ au point *b*, censé perpendiculaire à *ab* dans le plan Q; $cg = \rho + d\rho$ le rayon de courbure au point *c*, perpendiculaire à *bc* dans le plan R; *ch* la projection de *cg* sur le plan *abc*. Il est clair que l'angle *gch* mesure l'angle dièdre des deux plans osculateurs consécutifs, et qu'il est ainsi égal à $d\varepsilon$.

Fig. 65.



L'accélération suivant *cg*, $\frac{V^2}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{\rho}\right)$, se compose de l'accélération $\frac{V^2}{\rho}d\varepsilon = \frac{V^3}{\rho\rho_1}dt$ suivant *gh*, c'est-à-dire suivant la binormale, et de l'accélération égale à elle-même $\frac{V^2}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{\rho}\right)$, suivant *ch*, en négligeant les termes du second ordre. Si l'on observe que l'angle formé par *bf* et

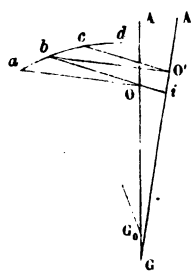
ch est égal à l'angle de contingence $d\alpha$, cette dernière donne lieu aux composantes $\frac{V^2}{\rho} + d\left(\frac{V^2}{\rho}\right)$, $\frac{V^2}{\rho} d\alpha = \frac{V^3}{\rho^2} dt$, respectivement dirigées suivant *bf* et *bc*. Il suit de là que l'accélération normale produit trois suraccélérations, l'une tangentielle, $\frac{V^3}{\rho^2}$; la seconde $\frac{d\left(\frac{V^2}{\rho}\right)}{dt}$, dirigée suivant le rayon de courbure; la troisième $\frac{V^3}{\rho\rho_1}$, perpendiculaire au plan osculateur, située dans l'angle dièdre obtus déterminé par trois éléments consécutifs prolongés dans le même sens.

La suraccélération totale peut donc être considérée comme formée des trois composantes suivantes, auxquelles nous donnerons respectivement les noms de *tangentielle, normale* et *binormale :*

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{A}_t = \dfrac{d^2V}{dt^2} + \dfrac{V^3}{\rho^2}, \\[2ex] \mathcal{A}_n = \dfrac{V}{\rho}\dfrac{dV}{dt} + \dfrac{d\frac{V^2}{\rho}}{dt} = 3\dfrac{V}{\rho}\dfrac{dV}{dt} - \dfrac{V^3}{\rho^2}\dfrac{d\rho}{ds}, \\[2ex] \mathcal{A}_b = \dfrac{V^3}{\rho\rho_1}. \end{cases}$$

170. On peut mettre $\mathcal{A}_n$ sous une autre forme. Soient pour cela (*fig.* 66) *ab*, *bc*, *cd* trois éléments consécutifs de la trajectoire; O, O′ les centres de courbure correspondant à *abc*, *bcd*; OA, O′A′ les intersections des plans normaux menés à *ab* et *bc* en *b* et *c*; *i* le point de rencontre de O*b*, prolongé, s'il y a lieu, avec O′A′. L'angle O′*i*O ne différant de 90° que d'un infiniment petit du premier ordre, on a

Fig. 66.



$$Oi = d\rho,$$

Mais Oi est l'élément d'arc en O de la section normale de la surface polaire perpendiculaire à OA, section pour laquelle l'angle de contingence est $d\alpha$. Si donc on désigne par $\mathfrak{R}$ le rayon de courbure principal de cette surface, on a

$$\pm\mathfrak{R} = \frac{d\rho}{d\alpha} = \frac{d\rho}{ds}\cdot\rho,$$

et par suite

$$(2) \qquad \lambda_n = 3\frac{V}{\rho}\frac{dV}{dt} - \frac{V^3}{\rho^3}\cdot(\pm\mathfrak{R}).$$

Dans le cas des courbes planes, $\mathfrak{R}$ représentera le rayon de courbure de la développée.

En résumé, on a les théorèmes suivants :

Théorème I. — *La suraccélération tangentielle est égale à la dérivée par rapport au temps de l'accélération tangentielle augmentée du produit de la vitesse par le carré du rapport de cette vitesse au rayon de courbure.*

Corollaire. — *Dans le mouvement uniforme et le mouvement uniformément varié, la suraccélération tangentielle se réduit à ce dernier terme.*

Théorème II. — *La suraccélération normale se compose du triple produit de l'accélération tangentielle par le rapport de la vitesse au rayon de courbure, diminué du produit du cube du rapport de la vitesse au rayon de courbure par le rayon de courbure principale de la surface polaire correspondant au centre de courbure de la trajectoire, en donnant à ce rayon le signe + ou le signe —, selon que le rayon de courbure de la trajectoire ira croissant ou décroissant.*

Corollaire. — *La suraccélération normale est nulle dans le mouvement circulaire uniforme,* ce qui est évident à priori.

Théorème III. — *La suraccélération binormale est égale au cube de la vitesse divisé par le produit des deux rayons*

de courbure, ou encore à l'accélération normale multipliée par le rapport de la vitesse au rayon de cambrure.

171. Ces théorèmes devant plus tard nous servir à étudier les propriétés relatives à la courbure de certaines lignes, il convient ici d'établir ou du moins de rappeler les quelques formules de géométrie qui doivent nous être utiles.

Soient G (*fig.* 66, p. 271) le point de l'arête de rebroussement de la surface polaire, situé sur la génératrice OA; $x = \mathrm{OG}$; on a

$$\text{angle OGO}' = d\varepsilon,$$

et par suite

$$\mathrm{O}i = x d\varepsilon = d\rho,$$

d'où

$$(3) \qquad x = \frac{d\rho}{d\varepsilon} = \frac{d\rho}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{d\varepsilon} = \mathfrak{R} \cdot \frac{\rho_1}{\rho},$$

formule qui permettra de construire le point G de l'arête de rebroussement lorsque $\mathfrak{R}$, ρ_1, ρ seront connus.

Si $x = 0$, $\mathfrak{R} = 0$, et réciproquement; le rayon de courbure principale est nul à l'arête de rebroussement, et cela se conçoit, puisqu'il y a là un point singulier.

Soient G_0 le point de l'arête de rebroussement qui précède le point G; $d\sigma$ l'élément $\mathrm{G}\mathrm{G}_0$ de cette arête; on peut supposer

$$\mathrm{G}_0\mathrm{O} = x,$$

$$\mathrm{GO}' = x + dx = \mathrm{GO} + \mathrm{O}'i = x + d\sigma + \rho d\varepsilon,$$

d'où

$$(4) \qquad d\sigma = dx - \rho d\varepsilon = d \cdot \left(\pm \mathfrak{R} \frac{\rho_1}{\rho}\right) - \frac{\rho}{\rho_1} ds.$$

Les rayons de courbure et de cambrure de l'arête de rebrous-

sement seront, par suite, respectivement donnés par

$$(5)\quad \begin{cases} \pm r = \dfrac{d\sigma}{ds} = \dfrac{d\cdot\left(\mathfrak{R}\dfrac{\rho_1}{\rho}\right)}{ds}\rho_1 - \rho, \\[2ex] \pm r_1 = \dfrac{d\sigma}{d\alpha} = \dfrac{d\cdot\left(\mathfrak{R}\dfrac{\rho_1}{\rho}\right)}{ds}\rho - \dfrac{\rho^2}{\rho_1}. \end{cases}$$

L'élément d'arc $OO' = d\zeta$ du lieu des centres de courbure a pour valeur

$$d\zeta = \sqrt{\rho^2 ds^2 + d\rho^2} = ds\sqrt{\frac{\rho^2}{\rho_1^2} + \frac{\mathfrak{R}^2}{\rho^2}},$$

et l'angle $O'Oi = j$ que forme la tangente à cette courbe avec ρ est donné par

$$\operatorname{tang} j = \frac{\rho\, ds}{d\rho} = \frac{\rho^2}{(\pm\mathfrak{R})\rho_1}.$$

Soit D le diamètre de la sphère osculatrice passant par les trois éléments ab, bc, cd; le cercle circonscrit au triangle formé par les diamètres 2ρ, $2(\rho + d\rho)$ des cercles osculateurs passant par ab, bc et bc, cd, correspondant à l'élément intermédiaire cd, est un grand cercle de la sphère osculatrice. On a donc, d'après une propriété connue,

$$D.4\rho^2 ds = 4(\rho + d\rho)\rho.2d\zeta,$$

d'où

$$D = 2\sqrt{\rho^2 + \rho_1^2\cdot\frac{\mathfrak{R}^2}{\rho^2}},$$

et la distance du centre de la sphère osculatrice à celui du cercle osculateur a pour valeur $\rho_1\cdot\dfrac{\mathfrak{R}}{\rho}$. De sorte que la connaissance de ρ, ρ_1, $\mathfrak{R}$ conduit à la détermination complète de la sphère osculatrice.

172. *Du rayon de courbure de la développée de la cycloïde.* — Reportons-nous à la *fig.* 9, p. 23, et aux nos 28 et 58. L'accélération du point m, $\omega^2 r$ donne lieu à la suraccélération $\omega^2 r$ dirigée suivant la tangente au cercle générateur; et en appelant c' la corde complémentaire de $mb = c$, on reconnaît facilement que sa composante normale a pour valeur $\mathcal{A}_n = \omega^3 \frac{c'}{2}$. D'ailleurs la composante tangentielle de $\omega^2 r$ est $-\omega^2 \frac{c'}{2} = \frac{dV}{dt}$; et en substituant dans la formule (2), à la place de V, ρ, $\mathcal{A}_n$, $\frac{dV}{dt}$, les valeurs ci-dessus, on trouve l'expression connue

$$\mathcal{R} = 2c'.$$

173. *Du rayon de courbure de la développée de l'ellipse, de la parabole.* — Soient a, b les deux demi-axes de l'ellipse que l'on peut considérer comme engendrée par le mouvement d'un point dont l'accélération dirigée vers le centre serait proportionnelle à la distance à ce dernier point. Il est clair que dans ce cas la suraccélération se réduit à sa composante tangentielle, et par suite

$$\frac{\mathcal{R}}{\rho} = 3\,\frac{\rho}{V^2}\cdot\frac{dV}{dt}.$$

Soit δ l'angle formé par la normale avec le diamètre correspondant; on a

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V^2}{\rho}\,\mathrm{tang}\,\delta,$$

d'où

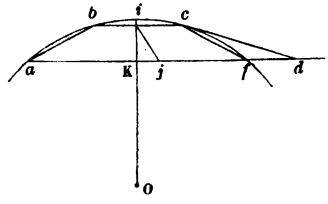
$$\mathrm{tang}\,\delta = \frac{1}{3}\frac{\mathcal{R}}{\rho}.$$

Cette propriété de l'ellipse s'étend évidemment à la parabole; on peut d'ailleurs s'en assurer en considérant cette

courbe comme décrite par un point dont l'accélération est constante en grandeur et en direction; la suraccélération normale étant nulle comme la suraccélération totale, le théorème s'établit comme ci-dessus. La même propriété subsiste également pour l'hyperbole; c'est une conséquence de ce qui va suivre.

174. *De la déviation de la courbure des courbes planes.* — Soient ab, bc (*fig.* 67) deux éléments consécutifs supposés égaux d'une courbe; O le centre du cercle osculateur passant par les points a, b, c; f et d les points de rencontre de ce cercle et de la courbe avec la parallèle menée par le point a à l'élément bc; $cf = ab$ peut être considéré comme le troisième élément du cercle; cd formant un angle infiniment petit avec cf, est lui-même du même ordre de grandeur que cette longueur et peut, par suite, être regardé comme étant le troisième élément de la courbe. La distance fd est évidemment du second ordre.

Fig. 67.



Soit Oi le rayon du cercle perpendiculaire au milieu i de bc, rencontrant la corde ad au point K; je joins le point i au milieu j de ad, et j'appelle δ l'angle Kij. On peut regarder fd comme mesurant la quantité dont la courbe s'éloigne du cercle osculateur immédiatement au delà du point où l'osculation a lieu, ou, si l'on veut, la déformation de la courbe par rapport au cercle; on a

$$fd = 2\mathrm{K}j = 2\mathrm{K}i \tang \delta.$$

Soit $d\omega$ l'angle au centre correspondant à chacun des éléments ab, bc; l'arc abi étant égal à $\frac{3}{2} \cdot \rho\, d\omega$, devient, d'a-

près une propriété connue du cercle,

$$Ki = \frac{9}{4} \cdot \rho^2 \frac{d\omega^2}{\rho} = \frac{9}{4} \rho\, d\omega^2,$$

d'où

$$fd = \frac{9}{4} \rho\, d\omega^2 \operatorname{tang} \delta.$$

La longueur fd, pour toutes les courbes ayant les éléments ab, bc communs, étant proportionnelle à $\operatorname{tang}\delta$, M. Transon (*), à qui l'on doit les considérations précédentes, a été ainsi conduit à regarder cette tangente comme représentant la *première déviation* de la courbure, et il appelle *axe de déviation* la droite de direction déterminée ij.

La parabole osculatrice à une courbe, passant par trois éléments de cette courbe, a deux rayons de courbure consécutifs communs avec elle, ou, si l'on veut, les développées ont deux éléments consécutifs communs, l'un en grandeur et en direction, l'autre en direction; de sorte que les rayons de courbure des développées correspondant au point d'osculation sont les mêmes. Or il est clair que l'axe de déviation en un point de la parabole est le diamètre correspondant; on a donc, quelle que soit la forme de la courbe,

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{1}{3} \frac{\mathcal{R}}{\rho}.$$

Connaissant $\mathcal{R}$ et ρ, on construira l'axe de déviation en prolongeant au delà du centre de courbure $\mathcal{R}$ d'une longueur égale à $\frac{1}{3}$ de ce rayon et joignant le point obtenu à celui de la courbe.

On remarquera que l'axe de déviation est un diamètre

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VI.

commun à toutes les coniques ayant, au point considéré, trois éléments communs avec la courbe proposée.

175. *Interprétation géométrique de la suraccélération normale dans le cas d'un mouvement plan.* — L'accélération normale dans le mouvement d'un point dans un plan est susceptible d'une interprétation géométrique très-curieuse et que nous allons faire connaître. Soient α l'angle formé par l'accélération totale φ avec la normale; φ_n l'accélération normale : on a

$$\varphi_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad \frac{dV}{dt} = \varphi_n \operatorname{tang}\alpha, \quad \operatorname{tang}\delta = \frac{1}{3}\cdot\frac{\mathfrak{R}}{\rho},$$

et, eu égard à ces relations, on obtient facilement

$$\mathfrak{R}_n = \frac{3\varphi_n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\rho}}(\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\delta) = \frac{3\varphi_n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\rho\dfrac{\cos^2\alpha.\cos^2\delta}{\sin^2(\alpha-\delta)}}}.$$

Soient c, c' les cordes interceptées par la direction de φ dans le cercle osculateur et la parabole osculatrice; le paramètre de cette dernière étant (50) $2\rho\cos\delta$, son équation rapportée à la tangente et à l'axe de déviation est

$$y^2 = 2\rho\cos\delta.x.$$

Si x', y' sont les coordonnées de l'extrémité de c', on a

$$c' = y'\frac{\cos\delta}{\sin(\alpha-\delta)},$$

$$x' = y'\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\delta)},$$

d'où

$$y' = 2\rho\frac{\cos\delta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\delta)},$$

$$c' = 2\rho\cdot\frac{\cos^2\delta\cos\alpha}{\sin^2(\alpha-\delta)},$$

par suite

$$\mathcal{A}_{\omega_n} = \frac{3\varphi_n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{c'}{2}\cos\alpha}} = 3\varphi_n\sqrt{\frac{2\varphi}{c'}}.$$

Or

$$\varphi = \frac{V^2}{2c'}, \quad \varphi_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Donc enfin

$$\mathcal{A}_{\omega_n} = 6 \cdot \frac{V^3}{\rho\sqrt{cc'}}.$$

La suraccélération normale est ainsi égale à six fois le cube de la vitesse divisé par le produit du rayon de courbure par une moyenne géométrique entre les cordes interceptées par la direction de l'accélération totale dans la parabole et le cercle osculateurs.

176. *Recherche du rayon de courbure de l'ellipse considérée comme engendrée par un point mobile en vertu d'une accélération dirigée vers l'un des foyers et variant en raison inverse du carré du rayon vecteur.*

Soient (*fig.* 11, p. 30) F le foyer par où passe la direction de l'accélération; $2a$, $2b$ le grand et le petit axe; m, m' deux positions consécutives du mobile; n, n' les points déterminés dans le cercle de rayon $2a$ et de centre F par les rayons vecteurs Fm, Fm'; ω la vitesse angulaire de mF; V_r la vitesse relative suivant le rayon vecteur de m; p, p' les perpendiculaires abaissées des foyers F, F′ sur la tangente; c une constante; α l'angle formé par la normale et le rayon vecteur. On a (35)

$$\omega = \frac{c}{r^2},$$

$$V_r = \omega r \operatorname{tang}\alpha.$$

L'accélération du point m (35) peut être représentée par

$$\varphi = \frac{1}{2}\frac{ac}{b^2}\omega = \frac{c}{2b^2}\cdot\omega.a.$$

Prenant pour simplifier $c = 2b^2$, φ ne sera autre chose que la vitesse du point n à laquelle on aurait fait subir un déplacement de 90° autour de ce point de manière à le ramener suivant mF. La suraccélération de m n'est donc, par suite, que l'accélération de n à laquelle on aurait fait subir un pareil déplacement.

Or l'accélération d'entraînement dans le mouvement relatif de m suivant mF est égale à la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération relative prise en sens contraire, toutes deux dirigées suivant mF, et de l'accélération centrifuge composée $2\omega V_r$, perpendiculaire à mF; la composante normale à mF, dirigée en sens inverse de ωr, est donc

$$2\omega^2 r \operatorname{tang}\alpha,$$

d'où, pour l'accélération angulaire de mF autour de F,

$$2\omega^2 \operatorname{tang}\alpha.$$

On a par suite

Accélération tangentielle de n, ou *composante de la suraccélération de m suivant* mF..., $4\omega^2 a \operatorname{tang}\alpha$.

Accélération normale de n, ou *composante de la suraccélération de m dirigée en sens inverse de* ωr... $2\omega^2 a$.

On déduit facilement de là que la suraccélération normale a pour valeur

$$\mathcal{A}_n = -6\omega^2 a \sin\alpha.$$

D'un autre côté, on a

$$\mathcal{A}_n = \frac{3}{V}\left[\frac{V^2}{\rho}\frac{dV}{dt} - \frac{V^4}{\rho^3}\cdot\frac{1}{3}\left(\pm\frac{\mathcal{R}}{\rho}\right)\right].$$

Or

$$\frac{V^2}{\rho} = \varphi \cos\alpha = a\omega \cos\alpha,$$

$$\frac{dV}{dt} = \varphi \sin\alpha = -a\omega \sin\alpha,$$

$$V = \frac{\omega r}{\cos\alpha}.$$

En faisant ces substitutions dans la formule ci-dessus, on trouve

$$\frac{1}{3}\left(\pm\frac{\mathfrak{R}}{\rho}\right) = \frac{b^2 \sin\alpha}{ar\cos^3\alpha} - \operatorname{tang}\alpha.$$

Il est facile de démontrer la coïncidence de ce résultat avec celui que nous avons obtenu plus haut. Remarquons en effet, en posant $F'm = r'$, que

$$b^2 = pp' = rr' \sin\alpha\cos\alpha = r(2a - r)\sin\alpha\cos\alpha,$$

d'où

$$\frac{1}{3}\left(\pm\frac{\mathfrak{R}}{\rho}\right) = \frac{(a-r)\sin\alpha}{a\cos\alpha}.$$

Soient O le centre de l'ellipse; I, q, q' les projections de O, F, F' sur la normale; on a

$$mI = \frac{1}{2}(mq + mq') = \frac{1}{2}(r\cos\alpha + r'\cos\alpha) = a\cos\alpha,$$

$$OI = \frac{1}{2}(Fq - F'q') = \frac{1}{2}(r\sin\alpha - r'\sin\alpha) = (a - r)\sin\alpha,$$

d'où

$$\frac{1}{3}\left(\pm\frac{\mathfrak{R}}{\rho}\right) = \frac{OI}{mI} = \operatorname{tang}\delta,$$

en continuant à appeler δ l'angle OmI; ce qui est conforme à la formule du n° 173. Les résultats que l'on vient d'obtenir s'appliquent à l'hyperbole; on sait en effet que cette

courbe peut être considérée comme la trajectoire d'un point mobile obéissant à la loi énoncée tout à l'heure pour l'ellipse, mais sous des conditions de vitesse initiale différentes.

177. *Du rayon de cambrure de l'hélice, etc.* — Considérons une hélice tracée sur un cylindre quelconque, dont R représente le rayon variable de la section droite, et soit β l'angle constant formé par les tangentes à l'hélice avec les génératrices du cylindre. L'hélice peut être considérée comme engendrée par un point mobile animé d'un mouvement uniforme suivant la section droite et d'un mouvement de translation uniforme parallèle aux génératrices. Si v désigne la vitesse dans le premier de ces mouvements, la vitesse dans le second sera $v \cot \beta$, et la vitesse résultante

$$V = v\sqrt{1 + \cot^2 \beta} = \frac{v}{\sin \beta}.$$

Or la seule accélération du point mobile est $\frac{v^2}{R}$, dont la direction est normale à l'hélice; on a donc par suite, pour déterminer le rayon de courbure ρ de l'hélice,

$$\frac{v^2}{R} = \frac{V^2}{\rho},$$

d'où

$$\rho = \frac{R}{\sin^2 \beta}.$$

Il résulte aussi du raisonnement ci-dessus que la direction de ρ est la même que celle de R.

Dans le mouvement du point, suivant la section droite du cylindre, les suraccélérations tangentielle et normale ont respectivement pour valeurs $\frac{v^3}{R^2}$ et $\frac{v^3}{R^3}\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}'$ désignant le rayon de courbure de la développée de cette section. On

déduit de là, pour les composantes normale et binormale de la suraccélération relative au mouvement hélicoïdal,

$$\mathcal{A}_n = \frac{v^3}{R^3}\mathcal{R}',$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{v^3}{R^2}\cos\beta.$$

Or si ρ_1 et $\mathcal{R}$ désignent le rayon de cambrure de l'hélice et le rayon de courbure principal de la surface polaire, on a aussi (169 et 170)

$$\mathcal{A}_n = \frac{V^3}{\rho^3}\mathcal{R} = \frac{v^3}{R^3}\mathcal{R}\sin^3\beta,$$

$$\mathcal{A}_b = \frac{V^3}{\rho\rho_1} = \frac{v^3}{\rho_1 R\sin\beta},$$

par suite

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{R}'}{\sin^3\beta},$$

$$\rho_1 = \frac{R}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{2R}{\sin 2\beta},$$

et pour le diamètre de la sphère osculatrice

$$D = \frac{1}{\sin^2\beta}\sqrt{R^2 + \frac{\mathcal{R}'^2}{\cos^2\beta}}.$$

Dans le cas d'une hélice circulaire, on a $\mathcal{R}' = 0$, par suite $\mathcal{R} = 0$; et effectivement le lieu des centres de courbure devient alors l'arête de rebroussement de la surface polaire; de plus, le cercle osculateur est un grand cercle de la sphère osculatrice.

Si l'on appelle x, r, r_1 la distance du centre de courbure à l'arête de rebroussement, et les rayons de courbure et de cambrure de cette arête; ds l'élément de la section droite du cylindre, l'élément hélicoïde étant $\frac{ds}{\sin\beta}$, les formules

(3) et (5) donnent

$$x = \frac{\mathcal{R}'}{\sin^2\beta\cos\beta},$$

$$\pm r = \frac{R}{\cos^2\beta\sin^3\beta}\frac{d\mathcal{R}'}{ds} - \frac{R}{\sin^2\beta},$$

$$\pm r_1 = \frac{R}{\cos\beta\sin^4\beta}\frac{d\mathcal{R}'}{ds} - \frac{R\cos\beta}{\sin^3\beta}.$$

Dans le cas d'un cylindre circulaire ou à développante de cercle, il vient tout simplement

$$r = \frac{R}{\sin^2\beta}, \quad r_1 = \frac{R\cos\beta}{\sin^3\beta}.$$

On peut arriver assez simplement, par le même procédé, à trouver l'expression du rayon de courbure des courbes hélicoïdes tracées sur toute surface développable et des loxodromies. Mais nous nous éloignerions de notre but en nous occupant de ces questions qui n'offrent qu'un intérêt secondaire.

§ II. — De la suraccélération dans le mouvement relatif d'un point par rapport a un système invariable.

178. Soient, au bout du temps t (*fig.* 60, p. 226),

a le point du système invariable (S) où se trouve actuellement le point mobile m ;

ω, α la vitesse angulaire instantanée et l'accélération angulaire ;

V_e, φ_e, $\mathcal{A}_e$ la vitesse, l'accélération, la suraccélération d'entraînement ;

V, φ, $\mathcal{A}$ la vitesse, l'accélération et la suraccélération absolues ;

V_r, φ_r, $\mathcal{A}_r$ la vitesse, l'accélération et la suraccélération relatives;

U_r, Ψ_r les projections de V_r et φ_r sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation;

W_r la projection de V_r sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'accélération angulaire.

Concevons que l'on imprime à (S) et à m un mouvement translatoire dont la vitesse, l'accélération, la suraccélération, soient respectivement égales à celles du point a qui se trouve ainsi réduit au repos; on est alors ramené à considérer le mouvement relatif de m dont l'accélération absolue serait la résultante de φ' et $-\varphi_e$ par rapport à (S) tournant actuellement autour du point a, et dont nous représenterons par ax, ay les axes de la rotation instantanée et de l'accélération angulaire.

Le point m possède actuellement la vitesse V_r; son accélération relative est la résultante de $\overline{\varphi}-\overline{\varphi_e}$ et de l'accélération centrifuge composée $2\omega U_r$ dont la direction s'obtient en supposant que U_r tourne de 90° en sens inverse de ω.

Dans le temps dt, la droite ab qui représente V_r tourne autour de ax d'un angle égal à ωdt, vient en ab' et le mobile prend la position m', distante de a de $V_r dt = m'a$.

L'accélération absolue de m' par rapport au système tournant autour du point a est la résultante de $\overline{\varphi}+\overline{\mathcal{A}_r dt}$ et de $-\overline{\varphi_e}-\overline{\mathcal{A}_e dt}$.

L'accélération d'entraînement de m' sera du premier ordre comme $m'a$; on peut donc, dans son évaluation, en négligeant les termes du second ordre, supposer que dans le temps dt, ax, ay n'ont pas changé de direction et que ω et α ont conservé les mêmes valeurs : on a ainsi l'accélération centripète $\omega^2 U_r dt$ par rapport à ax, de sens contraire à U_r, et l'accélération rotatoire $\alpha W_r dt$ autour de ay, dont

la direction s'obtient en admettant que W_r tourne de 90° dans le sens de α.

Lorsque le mobile est en m', la rotation instantanée est la résultante de ω et $\alpha\, dt$; mais, d'après un principe établi (154, 155) sur l'indépendance entre les accélérations centrifuges composées et les mouvements composants, il suffit de considérer séparément chacune des rotations partielles. La seconde rotation donne, en négligeant toujours les termes du second ordre, l'accélération $2\alpha W_r\, dt$ dirigée suivant W_r que l'on ferait tourner de 90° en sens inverse de α.

Soient $ab^{(1)}$ la droite qui représente la vitesse de m'; $ac^{(1)} = U_r^{(1)}$, sa projection sur un plan perpendiculaire à ax; ac, ac' les projections de ab, ab' sur ce même plan; l'accélération centrifuge composée $2\omega U_r^{(1)}$ relative à m' et à ω se compose des accélérations semblables $2\omega U_r$, $2\omega \overline{cc^{(1)}}$; or $cc^{(1)}$ est la résultante de $cc' = \omega U_r\, dt$, et de $c'c^{(1)} = \Psi_r dt$, car $b'b^{(1)}$ n'est autre chose que $\varphi_r dt$. D'où il suit que $2\omega U_r^{(1)}$ se compose de $2\omega U_r$, $2\omega \Psi_r$ dirigées respectivement suivant U_r, Ψ_r qui auraient tourné de 90° en sens inverse de ω, et de $2\omega^2 U_r$ dirigée suivant U_r.

Cela posé, soient ad, $ad^{(1)}$ les droites qui représentent dans l'espace absolu les accélérations relatives φ_r, $\varphi_r^{(1)}$, du mobile en a et m'; la longueur $dd^{(1)}$ est la résultante de l'accélération en m', et de celle de m en a, prise en sens contraire, telles que nous les avons estimées tout à l'heure.

Donc, si l'on se rappelle que dans $\varphi_r^{(1)}$ on doit prendre $\omega^2 U_r\, dt$, $\alpha W\, dt$ en sens contrai e, $dd^{(1)}$ se compose de :

$-\mathcal{A}_e\, dt$;

$\mathcal{A}\, dt$;

$\omega^2 U_r dt + 2\omega^2 U_r dt = 3\omega^2 U_r dt$, dirigée suivant U_r;

$3a W_r dt$, dirigée suivant W_r que l'on aurait fait tourner de 270° dans le sens de α;

$2\omega \Psi_r$, dont la direction s'obtient de la même manière par rapport à ω et Ψ_r.

Dans le temps dt, ad décrit autour de ax l'angle ωdt et vient se placer en ad', et $dd^{(1)}$ est la résultante de $dd' = \Psi_r \omega dt$ et de $d'd^{(1)}$, qui n'est autre chose que la suraccélération relative élémentaire $\mathcal{A}_r dt$. On déduit de là et de ce qui précède que $\mathcal{A}_r$ se compose de :

$\mathcal{A}$;
$-\mathcal{A}_e$;
$3\omega^2 U_r$, dirigée suivant U_r ;
$2\alpha W_r$, dirigée suivant W_r que l'on aurait fait tourner de 270° dans le sens de α ;
$3\omega\Psi_r$, dont la direction s'obtient de la même manière par rapport à Ψ_r et ω.

En d'autres termes :

La suraccélération relative se compose : 1° de la suraccélération absolue ; 2° de la suraccélération d'entraînement prise en sens contraire ; 3° d'une suraccélération représentée par la projection de la vitesse relative sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané que l'on aurait multiplié par le triple carré de la vitesse angulaire ; 4° d'une suraccélération égale au triple produit de l'accélération angulaire par la projection sur un plan perpendiculaire à son axe de la vitesse relative. Le sens et la direction de cette composante s'obtiennent en supposant que cette projection tourne de 270° dans le sens de l'accélération angulaire ; 5° d'une suraccélération égale au triple produit de la vitesse angulaire par la projection de l'accélération relative sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané, et dont la direction s'obtient par rapport à cette accélération comme celle de la suraccélération précédente par rapport à la vitesse relative.

On peut remplacer cette dernière (155) par trois autres de même nature correspondant aux composantes de φ, $-\varphi_e$, $2\omega U_r$, de φ_r ou par $2\omega\Psi$, $-2\omega\Psi_e$ et $4\omega^2 U_r$, cette dernière étant dirigée en sens inverse de U_r.

Remarque. — Dans le cas d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe, la suraccélération d'entraînement est égale au produit du cube de la vitesse angulaire par la distance du mobile à l'axe de rotation et dirigée en sens inverse de la vitesse rotatoire.

179. Supposons maintenant que l'on connaisse les éléments du mouvement relatif d'un point par rapport à un système invariable et que l'on veuille déterminer ceux du mouvement absolu. La composition des vitesses et le théorème du n° 160 faisant connaître la vitesse et l'accélération absolue, pour obtenir la suraccélération on fera l'application du théorème suivant, qui est l'inverse du précédent.

Si un point est animé d'un mouvement relatif par rapport à un système invariable, la suraccélération absolue se compose : 1° de la suraccélération relative; 2° de la suraccélération d'entraînement; 3° d'une suraccélération représentée par la vitesse relative, prise en sens inverse, projetée sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané, que l'on aurait multipliée par le triple carré de la vitesse angulaire instantanée; 4° d'une suraccélération égale au triple produit de l'accélération angulaire par la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe de cette dernière, de la vitesse relative. Le sens et la direction de cette composante seront déterminés par la position que prendrait la projection ci-dessus de la vitesse relative, en supposant qu'elle tourne de 90° dans le sens de l'accélération angulaire; 5° d'une suraccélération égale au triple produit de la vitesse angulaire par la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe des vitesses, de l'accélération relative du point mobile, et dont la direction par rapport à cette accélération se détermine comme celle de la suraccélération précédente par rapport à la vitesse relative.

180. *Formules relatives à la détermination de la dévia-*

tion des courbes polaires. — Les courbes polaires peuvent être considérées comme engendrées par un point mobile qui glisse d'un mouvement relatif suivant le rayon vecteur, tandis que celui-ci tourne d'un mouvement uniforme autour du pôle.

La direction de la tangente à de pareilles courbes est donnée par la composition des vitesses; le théorème du n° 160 permet de trouver l'accélération absolue en fonction de l'accélération relative, par suite l'accélération normale et le rayon de courbure.

Pour calculer la suraccélération normale et la déviation, on remarquera que les suraccélérations n°s 1 et 3 du théorème du numéro précédent, c'est-à-dire $\mathcal{A}_r$, $-3\omega^2 V_r$, sont dirigées suivant r; que la suraccélération d'entraînement $-\omega^3 r$ et la suraccélération n° 5, $3\omega\Psi_r$, sont dirigées suivant la vitesse rotatoire ωr. Si donc on représente par α l'angle que forme la normale avec le rayon vecteur r, on a

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= -(\mathcal{A}_r - 3a^2 V_r)\cos\alpha + (3\omega\Psi_r - \omega^3 r)\sin\alpha \\ &= \frac{3V}{\rho}\frac{dV}{dt} + \frac{V^3}{\rho^2}\left(\pm\frac{\mathcal{R}}{\rho}\right). \end{aligned}\right.$$

Comme application, considérons la spirale logarithmique dont nous nous sommes déjà occupés au n° 160. On voit sans difficulté que l'accélération et la suraccélération relatives sont respectivement égales à mr et $m^2 r$. La composition des vitesses donne

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{m}{\omega}, \quad V = \frac{mr}{\sin\alpha},$$

le théorème du n° 160

$$\rho = \frac{r}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{dV}{dt} = \frac{m^2 r}{\sin\alpha};$$

en substituant ces valeurs dans la formule ci-dessus, il vient

pour la déviation

$$\frac{1}{3}\left(\pm\frac{\mathfrak{R}}{\rho}\right)=\frac{1}{3}\operatorname{tang}\alpha.$$

Donc dans la spirale logarithmique la déviation est constante, comme l'avait remarqué M. Transon.

Dans la spirale d'Archimède, $r=a\theta$, et l'on a

$$V_r=a\omega,\quad \mathcal{A}_{\theta r}=0,\quad \varphi_r=0,\quad \operatorname{tang}\alpha=\frac{a}{r},\quad V=\frac{a\omega}{\sin\alpha};$$

l'accélération normale est

$$\omega^2 r\cos\alpha+2\omega^2 a\sin\alpha;$$

l'accélération tangentielle

$$\frac{dV}{dt}=\omega^2 a\cos\alpha;$$

le rayon de courbure

$$\rho=\frac{a}{\sin\alpha\,(1+\sin^2\alpha)},$$

et l'on déduit

$$\operatorname{tang}\delta=\frac{1}{3}\,\frac{(1+3\sin^2\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\sin^2\alpha)^2}.$$

Au lieu de procéder par des transformations analytiques, on aurait pu arriver par des constructions géométriques successives à la détermination du rayon de courbure de la développée.

Il serait très-facile de déduire de la formule (A) l'expression analytique de la déviation dans les courbes polaires; il suffirait en effet d'y supposer

$$\varphi_r=\frac{dr}{dt}=\omega\,\frac{dr}{dt},$$

$$\mathcal{A}_{\theta r}=\frac{d\varphi_r}{dt}=\omega^2\,\frac{d^2r}{dt^2},$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}},$$

$$V = \omega\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}},$$

$$\rho = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{dt^2}}.$$

Le théorème fondamental établi plus haut sur les suraccélérations dans le mouvement relatif permettra de trouver sans difficulté le rayon de cambrure et le rayon principal de la surface polaire de la trajectoire dans l'espace, d'un point qui se mouvrait d'un mouvement uniforme sur une courbe donnée, laquelle tournerait également d'un mouvement uniforme autour d'un axe; en supposant que cette courbe se réduise à une droite parallèle à l'axe, on retombe sur les propriétés des hélices cylindriques.

On trouverait aussi sans difficulté le rayon de la développée de l'épicycloïde circulaire, considérée comme engendrée par un point se mouvant uniformément sur un cercle qui tournerait lui-même d'un mouvement uniforme autour d'un point fixe.

181. *Application à la théorie des surfaces.* — Reprenons les considérations du n° 161, et proposons-nous de chercher le rayon de courbure de la développée de la section normale à la surface engendrée par AB menée suivant la direction V_a. Soient ψ_r, ψ_e, ψ_a, les dérivées $\frac{d\varphi_r}{dt}$, $\frac{d\varphi_e}{dt}$, $\frac{d\varphi_a}{dt}$, $\mathcal{R}_r$, $\mathcal{R}_e$, $\mathcal{R}_a$, les rayons de courbure des développées de AB, AC, AD, correspondant au point A; μ, ν, ϖ les composantes de l'accélération angulaire de (S) suivant Ax, Ay, Az.

La suraccélération d'entraînement a pour composantes

$$-\frac{V_e^3}{\rho_e^3}(\pm\mathcal{R}_e)+3\frac{V_e}{\rho_e}\varphi_e \quad \text{suivant} \quad Az,$$

$$\psi_e-\frac{V_e^3}{\rho_e^2} \quad \text{suivant} \quad Ay.$$

La suraccélération relative a de même pour composantes

$$-\frac{V_r^3}{\rho_r^2}(\pm\mathcal{R}_r)+3\frac{V_r}{\rho_r}\varphi_r \quad \text{suivant} \quad Az,$$

$$\psi_r-\frac{V_r^3}{\rho_r^2} \quad \text{suivant} \quad Ax.$$

La suraccélération (4) du n° 179 est

$$-3V_r(m^2+n^2+p^2) \quad \text{suivant} \quad Ax.$$

La vitesse relative V_r et l'accélération angulaire donnent les suraccélérations composantes

$$3\nu V_r \quad \text{suivant} \quad Az,$$

$$-3\varpi V_r \quad \text{suivant} \quad Ay.$$

Enfin les composantes φ_r, $\frac{V_r^2}{\rho_r}$ de l'accélération relative et la rotation instantanée fournissent les suraccélérations

$$-3m\frac{V_r^2}{\rho_r} \quad \text{suivant} \quad Ay,$$

$$3n\varphi_r \quad \text{suivant} \quad Az,$$

$$-3n\frac{V_r^2}{\rho_r} \quad \text{suivant} \quad Ax,$$

$$-3p\varphi_r \quad \text{suivant} \quad Ay.$$

En récapitulant, on a les suraccélérations

$$\psi_r - \frac{V_r^3}{\rho_r^2} - 3V_r(m^2+n^2+p^2) - 3n\frac{V_r^2}{\rho_r} \quad \text{suivant} \quad Ax,$$

$$\psi_e - \frac{V_e^3}{\rho_e^2} - 3\varpi V_r - 3p\varphi_r - 3m\frac{V_r^2}{\rho_r} \quad \text{suivant} \quad Ay,$$

$$-\frac{V_e^3}{\rho_e^3}(\pm\mathcal{R}_e) - \frac{V_e^3}{\rho_e^3}(\pm\mathcal{R}_r) + 3\left(\frac{V_e\varphi_e}{\rho_e} + \frac{V_r\varphi_r}{\rho_r}\right) + 3\nu V_r + 3n\varphi_r$$

suivant Az.

La suraccélération tangentielle suivant Az a pour valeur

$$\left[\psi_r - \frac{V_r^3}{\rho_r^2} - 3(m^2+n^2+p^2)V_r - 3n\frac{V_r^2}{\rho_r}\right]\sin\alpha$$
$$+\left(\psi_e - \frac{V_e^3}{\rho_e^2} - 3\varpi V_r - 3m\frac{V_r^2}{\rho_r} - 3p\varphi_r\right)\cos\alpha = \psi_a - \frac{V_a^3}{\rho_a^2}.$$

La suraccélération située dans le plan xAy et perpendiculaire à V_a a pour expression

$$\left(\psi_e - \frac{V_e^3}{\rho_e^2} - 3\varpi V_r - 3p\varphi_r\right)\cos\alpha$$
$$-\left[\psi_r - \frac{V_r^3}{\rho_r^2} - 3V_r(m^2+n^2+p^2) - 3m\frac{V_r}{\rho_r} - 3n\frac{V_r^2}{\rho_r}\right]\sin\alpha.$$

Pour que trois éléments consécutifs de la trajectoire soient dans un même plan normal à la surface, il faut que cette suraccélération soit nulle. En exprimant cette condition et remplaçant V_r, φ_r, par leurs valeurs en fonction de α, la relation obtenue permettra de déterminer la valeur que l'on doit choisir pour ψ_r.

Enfin, on a pour l'accélération normale suivant Az

$$-\frac{V_a^3}{\rho_a^3}(\pm\mathcal{R}_a) + 3\frac{V_a}{\rho_a}\varphi_a = -\frac{V_e^3}{\rho_e^3}(\pm\mathcal{R}_e) - \frac{V_r^3}{\rho_r^3}(\pm\mathcal{R}_r)$$
$$+3\left(\frac{V_r\varphi_r}{\rho_r} + \frac{V_e\varphi_e}{\rho_e}\right) + 3\nu V_r + 3n\varphi_r.$$

Remplaçant φ_a, φ_r, et ρ_a dans $3\frac{V_a\varphi_a}{\rho_a}$ par leurs valeurs

trouvées au n° 161, et appelant, $\operatorname{tang}\delta_a = \frac{1}{3}\left(\pm\frac{\mathfrak{R}_a}{\rho_a}\right)$, $\operatorname{tang}\delta_e = \frac{1}{3}\left(\pm\frac{\mathfrak{R}_e}{\rho_e}\right)$, $\operatorname{tang}\delta_r = \frac{1}{3}\left(\pm\frac{\mathfrak{R}_r}{\rho_r}\right)$, les déviations des courbes AD, AC, AB, on trouve

$$\operatorname{tang}\delta_a = \rho_a^2\cos^3\alpha\left[\frac{1}{\rho_e^2}\operatorname{tang}\delta_e + \frac{1}{\rho_r^2}\operatorname{tang}\delta_r\operatorname{tang}^3\alpha - \left(\frac{n\varphi_e}{V_e^3} + \frac{\nu}{V_e^2} + \frac{2p}{\rho_e V_e}\right)\operatorname{tang}\alpha - \frac{2np}{V_e^2}\operatorname{tang}^2\alpha\right].$$

D'où l'on déduit que, *parmi toutes les sections normales relatives à un même point, il y en a toujours une ou bien trois qui offrent en ce point une déviation nulle;* ce qui est conforme au résultat obtenu par M. Transon dans ses recherches sur les surfaces. Mais la méthode que nous venons d'employer ne nous paraît pas susceptible de conduire à la généralisation de ce théorème, comme nous l'avons fait pour ce qui est relatif à la simple courbure.

Pour trouver la loi de la déviation dans les sections obliques, nous supposerons, comme plus haut (n° 161), $V_r = 0$, ou $\alpha = 0$, φ_r étant différent de zéro. La suraccélération a pour composantes

$$\begin{array}{ll} \psi_r & \text{suivant } Ax, \\ \psi_e - \frac{V_e}{\rho_e^2} - 2p\varphi_r & \text{suivant } Ay, \\ -\frac{V_e^3}{\rho_e^3}(\pm\mathfrak{R}_e) + \frac{3V_e\varphi_e}{\rho_e} + 3n\varphi_r & \text{suivant } Az; \end{array}$$

nous remarquerons en même temps que

$$\varphi_r = \frac{V_e^2}{\rho_e}\operatorname{tang}\theta.$$

En exprimant que la suraccélération normale au plan osculateur est nulle, pour que la trajectoire ait quatre éléments consécutifs dans un même plan, on aura une re-

lation qui permettra de déterminer ψ_r en fonction de θ. La composante de la suraccélération suivant Oz se réduit à

$$\left[-\frac{V_a^3}{\rho_a^3}(\pm\mathcal{R}_a)+3\frac{V_a\varphi_a}{\rho_a}\right]\cos\theta=-\frac{V_e^3}{\rho_e^3}(\pm\mathcal{R}_e)+3\frac{V_e\varphi_e}{\rho_e}+3n\varphi_r,$$

d'où, en remarquant que $\varphi_a=\varphi_e$, $V_a=V_e$, et eu égard à la valeur ci-dessus de φ_r,

$$(g)\qquad \operatorname{tang}\delta_a=\operatorname{tang}\delta_e\cos\theta-n\frac{\rho_e}{V_e}\sin\theta.$$

Concevons que l'on porte sur la direction de ρ_a, à partir du point A, une longueur égale à $\operatorname{tang}\delta_a$, et soient x, y les coordonnées de ce point, on a

$$\cos\theta=\frac{z}{\operatorname{tang}\delta_a},\quad \sin\theta=\frac{x}{\operatorname{tang}\delta_a},$$

par suite

$$x^2+z^2=z\operatorname{tang}\delta_e-n\frac{\rho_e}{V_e}x,$$

équation d'un cercle passant par l'origine et par le point correspondant à $\operatorname{tang}\delta_e$. *Les directions rectangulaires de la tangente à l'origine et du diamètre correspondant sont celles pour lesquelles la déviation est nulle et atteint son maximum.*

Si l'on appelle Θ l'angle formé par la direction de ce diamètre avec $\operatorname{tang}\delta_a$, $\operatorname{tang}\Delta$ la déviation maximum, il est clair que

$$\operatorname{tang}\delta_a=\operatorname{tang}\Delta\cos\Theta.$$

Soient x', y', z', les coordonnées d'un point quelconque de l'axe de déviation situé à la distance γ de l'origine, on a

$$x'=\gamma\cos\delta_a\cos\theta,$$
$$y'=\gamma\sin\delta_a,$$
$$z'=\gamma\cos\delta_a\sin\theta,$$

d'où

$$\tang\theta = \frac{z'}{x'},$$

$$\frac{\tang\delta_e}{\cos\theta} = \frac{y'}{x'},$$

et la relation (g) divisée par $\cos\theta$ conduit à

$$y = x\tang\delta_e - n\frac{\rho_e}{V_e}z.$$

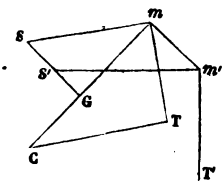
De sorte que *le lieu des axes de déviation des sections obliques relatives à un même azimut est un plan.*

§ III. — De la suraccélération dans le mouvement d'une figure plane mobile dans son plan.

182. Nous avons vu que lorsqu'une figure plane se meut dans son plan, il existe à chaque instant un point appelé *centre des accélérations,* caractérisé par cette propriété que l'accélération en chaque point du système est la même que si la rotation instantanée variable avait lieu effectivement autour de ce centre.

Soient S (*fig.* 68) la position de ce centre correspondant au temps t; m la position contemporaine d'un point de la figure; S', m', ce que deviennent ces deux points au bout du temps dt; $Sm = r$, $S'm' = r + dr$; ω, $\omega + d\omega$ les rotations instantanées correspondant aux positions m, m'; $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ l'accélération angulaire; $u = \frac{SS'}{dt}$ ce que l'on peut appeler la *vitesse du centre des accélérations;* C le centre instantané de rotation; R la distance Cm, $V = \omega . R = \frac{mm'}{dt}$ la vitesse du point m.

Fig. 68.



L'accélération du point m a pour composantes $\omega^2 . Sm$, $mS \cdot \frac{d\omega}{dt} = \alpha . mS$ suivant mS et sa perpendiculaire mT menée en m dans le sens du mouvement. Pareillement l'accélération de m' a pour composantes $(\omega^2 + d.\omega^2) mS'$, $m'S'(\alpha + d\alpha)$ suivant $m'S'$ et sa perpendiculaire $m'T'$ en m'.

L'accélération $(\omega^2 + d.\omega^2) S'm'$ peut être considérée comme la résultante des trois suivantes $(\omega^2 + d\omega^2) mS$, $(\omega^2 + d\omega^2) SS' = \omega^2 u dt$, $(\omega^2 + d\omega^2) mm' = \omega^2 V dt$, dirigées respectivement suivant r, de m vers S, suivant u et V; d'où résulte que l'accélération centripète donne lieu aux suraccélérations $r \frac{d\omega^2}{dt} = 2\omega r \frac{d\omega}{dt}$, $\omega^2 u$, $\omega^3 R$ dirigées respectivement suivant r, u, $-\omega R$.

L'accélération $S'm'(\alpha + d\alpha)$ peut de même être considérée comme la résultante de ces trois autres, $Sm.(\alpha + d\alpha)$, $mm'(\alpha + d\alpha) = \alpha\omega R dt$, $SS'.(\alpha + d\alpha) = u\alpha dt$, respectivement perpendiculaires à Sm, mm', SS', de sorte que l'accélération $r \frac{d\alpha}{dt}$ donne les suraccélérations $r \frac{d\alpha}{dt} = r \frac{d^2\omega}{dt^2}$, $\alpha\omega R = \omega \frac{d\omega}{dt} R$, $u \frac{d\omega}{dt}$ dirigées respectivement suivant mT, mC, et la perpendiculaire à u.

En résumé, on a les six composantes

$2\omega \frac{d\omega}{dt} r$	suivant	r,
$\omega^2 u$	suivant	u,
$-\omega^3 R$	suivant	ωR,
$r \frac{d^2\omega}{dt^2}$	suivant	mT,
$\omega \frac{d\omega}{dt} R$	suivant	mC,
$u \frac{d\omega}{dt}$	perpendiculaire à u.	

Soient ε, η les angles mSS', SmC; N, T les composantes de la suraccélération suivant mS et mT; on trouve facilement

$$N = 2\omega \frac{d\omega}{dt} r - \omega^2 u \cos\varepsilon + \omega^2 R \sin\eta + \omega R \frac{d\omega}{dt} \cos\eta - u \frac{d\omega}{dt} \sin\varepsilon,$$

$$T = \omega^2 u \sin\varepsilon - \omega^2 R \cos\eta + r \frac{d^2\omega}{dt} + \omega R \frac{d\omega}{dt} \sin\eta - u \frac{d\omega}{dt} \cos\varepsilon.$$

En posant $SC = a$, l'angle η est donné par la formule

$$\cos\eta = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}.$$

Dans le cas d'une vitesse angulaire instantanée constante, on a tout simplement

$$N = -\omega^2 u \cos\varepsilon + \omega^2 R \sin\eta,$$

$$T = \omega^2 u \sin\varepsilon - \omega^2 R \cos\eta.$$

On pourra toujours faire cette hypothèse lorsqu'on considérera une courbe engendrée géométriquement par un point d'une figure invariable dont les déplacements sont déterminés par des conditions suffisantes, car il est clair que l'on ne modifie en rien les propriétés géométriques des courbes décrites, et l'hypothèse précédente n'a pour effet que de simplifier les calculs.

On reconnaît facilement dans ce cas, le seul que nous considérerons dorénavant, que *le lieu géométrique des points pour lesquels la suraccélération est nulle est la perpendiculaire à la vitesse du centre des accélérations, abaissée du centre instantané de rotation.*

Soit G le point de rencontre de u avec Cm; la composante normale de la suraccélération a pour expression

$$\mathcal{A}_n = N \cos\eta + T \sin\eta = -\omega^2 u \cos(\varepsilon + \eta) = \omega^2 u \cos\widehat{SGm},$$

et l'accélération tangentielle

$$\mathcal{A}_t = \mathrm{T}\cos\eta - \mathrm{N}\sin\eta = -\omega^3\mathrm{R} + \omega^2 u \sin\widehat{\mathrm{SG}m}.$$

Donc :

Dans l'*hypothèse d'une rotation instantanée constante : 1° la suraccélération totale, en un point quelconque de la figure, se compose de la suraccélération correspondant à une rotation continue autour du centre instantané, et d'une suraccélération commune à tous les points de la figure, représentée par le produit du carré de la vitesse angulaire par la vitesse du centre des accélérations ; 2° la suraccélération normale divisée par le carré de cette vitesse angulaire est représentée en grandeur et en sens par la composante, suivant la direction du rayon de courbure, de la vitesse du centre des accélérations prise en sens contraire.*

Nous avons trouvé plus haut que la suraccélération normale est aussi représentée par

$$\mathcal{A}_n = 3\frac{\mathrm{V}}{\rho}\frac{d\mathrm{V}}{dt} - \frac{\mathrm{V}^3}{\rho^3}(\pm\mathcal{R}) = -3\omega^2\frac{\mathrm{R}r}{\rho}\sin\eta - \frac{\omega^3\mathrm{R}^3}{\rho^3}(\pm\mathcal{R}).$$

Si donc on connaît u ou $\frac{u}{\omega}$ en grandeur et en direction, on construira $\mathcal{R}$ à l'aide de la formule

$$\pm\mathcal{R} = \frac{\rho^3}{\mathrm{R}^3}\left(\frac{u}{\omega}\cos\widehat{\mathrm{SG}m} + 3\frac{\mathrm{R}r}{\rho}\sin\eta\right).$$

183. Supposons, en particulier, que *deux points de la figure soient assujettis à parcourir deux courbes données dont nous désignerons les éléments en plaçant un accent et deux accents sur les lettres qui entrent dans les formules ci-dessus*, on a

$$-3\frac{\mathrm{R}'r'}{\rho'}\sin\eta' - \frac{\mathrm{R}'^3}{\rho'^3}(\pm\mathcal{R}') = \frac{u}{\omega}\cos\widehat{\mathrm{SG}'m'},$$

$$-3\frac{\mathrm{R}''r''}{\rho''}\sin\eta'' - \frac{\mathrm{R}''^3}{\rho''^3}(\pm\mathcal{R}'') = \frac{u}{\omega}\cos\widehat{\mathrm{SG}''m''},$$

et l'on pourra construire les projections de $\frac{u}{\omega}$ sur R′ et R″, et par suite trouver $\frac{u}{\omega}$ en grandeur et en direction.

Ces dernières considérations sont notamment applicables : 1° à la courbe à longue inflexion du parallélogramme de Watt pour laquelle R′ et R″ sont nuls; 2° à l'ellipse décrite par un sommet d'un triangle dont les deux autres sommets parcourent deux droites fixes, cas où l'on a également $\frac{R'}{\rho'^3} = 0$, $\frac{R''}{\rho''^3} = 0$, en considérant les droites comme des limites de cercles; $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{\rho''}$ étant nuls, il en est de même de u, et par suite on a

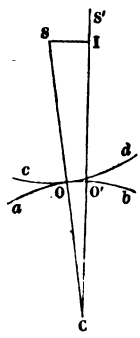
$$3\frac{Rr\sin\eta}{\rho} + \frac{R^3}{\rho^3}(\pm\mathcal{R}) = 0,$$

d'où

$$\mathcal{R} = 3\frac{\rho^2 r}{R^2}\sin\eta.$$

184. *Rayon de courbure des développées des épicycloïdes planes.*— Soient (*fig.* 69) *ab* la courbe fixe; *cd* la courbe mobile qui roule sur la précédente; CS leur normale commune au point de contact O; O′ la position de ce point au bout du temps dt; $OO' = ds$; $U = \frac{ds}{dt}$ la vitesse du point O; Γ, Γ′ les rayons de courbure de *ab* et *cd* au point O; ω la vitesse angulaire instantanée autour de ce point. On a (122), selon que les courbes présentent ou non leur convexité,

Fig. 69.



$$\frac{U}{\omega} = \frac{1}{\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'}},$$

et le centre instantané S des accélérations s'obtient en portant sur la normale commune en O la longueur $OS = \frac{U}{\omega}$.

La composante u_1 de la vitesse u du point S suivant OS est

$$u_1 = \frac{d.OS}{dt} = \frac{d\frac{U}{\omega}}{dt} = \frac{\frac{1}{\Gamma^2}\cdot\frac{d\Gamma}{dt} \pm \frac{1}{\Gamma'^2}\cdot\frac{d\Gamma'}{dt}}{\left(\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'}\right)^2},$$

ou, en y remplaçant dt par $\frac{ds}{U}$,

$$\frac{u_1}{\omega} = \left(\frac{1}{\Gamma^2}\cdot\frac{d\Gamma}{ds} \pm \frac{1}{\Gamma'^2}\cdot\frac{d\Gamma'}{ds'}\right)\left(\frac{U}{\omega}\right)^3.$$

Or $\Gamma\frac{d\Gamma}{ds}$, $\Gamma'\frac{d\Gamma'}{ds'}$ représentent les rayons de courbure Δ, Δ' des développées de ab et cd, on a donc

$$\frac{u_1}{\omega} = \left(\frac{\Delta}{\Gamma^3} \pm \frac{\Delta'}{\Gamma'^3}\right)\overline{SO}^3.$$

Soient C le centre de courbure de ab ; S' la position infiniment voisine de S située sur la normale CO' en O' ; SI la perpendiculaire abaissée de S sur S'C' ; on a

$$SI = \frac{OO'.CS}{OC},$$

et en appelant u_2 la composante de u perpendiculaire à SC

$$\frac{u_2}{\omega} = \frac{1}{\omega}\cdot\frac{SI}{dt} = \frac{U}{\omega}\cdot\frac{1}{\Gamma}\left(\Gamma \pm \frac{U}{\omega}\right) = \frac{SO}{\Gamma}(\Gamma \pm SO).$$

On pourra donc construire $\frac{u}{\omega}$ en grandeur et en direction, et par suite le rayon de courbure de la développée de l'épicycloïde décrite par un point du plan de la courbe.

Cas particulier. — 1° *La ligne fixe est une droite.* —

On a dans ce cas

$$\Gamma = \infty, \quad \Delta = 0, \quad \frac{U}{\omega} = \Gamma',$$

d'où

$$\frac{u_1}{\omega} = \Delta',$$

$$\frac{u_2}{\omega} = \Gamma';$$

on peut donc obtenir $\frac{u}{\omega}$ en grandeur et en direction. On remarquera que la suraccélération normale d'un point du plan mobile, divisée par le cube de la vitesse angulaire, est égale à la somme algébrique des projections, sur la tangente, des rayons de courbure de la courbe mobile et de sa développée, et l'on en déterminera d'ailleurs très-facilement le sens dans chaque pas particulier.

Comme première application, considérons le mode de génération de la cycloïde, et appelons c la normale à la courbe, c' sa corde complémentaire dans le cercle générateur; $\frac{u}{\omega}$ se réduit à sa composante $\frac{u_2}{\omega} = \Gamma'$ dirigée perpendiculairement à Γ'. Prise en sens contraire, sa projection sur la direction du rayon de courbure sera positive ou négative selon que l'accélération tangentielle $\frac{\omega^2 c'}{2}$ sera elle-même positive ou négative, comme il est facile de le reconnaître à l'inspection d'une figure. En substituant les valeurs

$$\frac{dV}{dt} = \pm \omega^2 \frac{c'}{2}, \quad V = \omega c, \quad \rho = 2c,$$

dans la formule

$$\pm \frac{\omega^3}{2} c' = \frac{3V}{\rho} \frac{dV}{dt} - \frac{V^3}{\rho^3} (\pm \mathcal{R}),$$

on trouve

$$\mathcal{R} = 2c',$$

conformément à ce que nous avons déjà obtenu en partant d'autres considérations.

Nous avons vu (125) que la *chaînette* peut être considérée comme engendrée par le foyer d'une parabole qui roule sur une droite fixe supposée horizontale. Soient r la longueur de la normale à la chaînette, d l'angle qu'elle forme avec la normale commune à la parabole et à la droite directrice; on a dans la parabole (50 et 173)

$$\Gamma' = \frac{2r}{\cos d}, \quad \frac{1}{3}\frac{\Delta'}{\Gamma'} = \operatorname{tang} d,$$

d'où

$$\Delta' = \frac{u_1}{\omega} = 6r\frac{\sin d}{\cos^2 d},$$

$$\frac{u_2}{\omega} = \frac{2r}{\cos d}.$$

La composante normale de la suraccélération est par suite $\pm 4\omega^3 r \operatorname{tang} d$ (182, p. 299), selon que l'accélération tangentielle $\frac{dV}{dt} = \pm 2\omega^2 r \operatorname{tang} d$ (122 et 125) est positive ou négative; d'où l'on déduit, en remarquant que $\rho = r$, $V = \omega r$,

$$\mathcal{R} = 2r \operatorname{tang} d,$$

et l'on reconnaît, en partant de là, que le centre de courbure de la développée de la chaînette est le symétrique de celui de la parabole par rapport à la normale de la chaînette.

Une construction géométrique conduit plus facilement encore à cette propriété curieuse.

La déviation dans la chaînette, $\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathcal{R}}{r}$, est mesurée par $\frac{1}{3}\operatorname{tang} d$, ou par les deux tiers de l'angle formé par la normale et la verticale, et une construction simple donne l'axe de déviation.

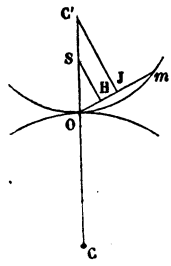
2° *Les deux courbes se réduisent à des cercles.* — Supposons, pour fixer les idées, que les deux cercles soient extérieurs, on a $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$, et $\frac{u}{\omega}$ se réduit à sa com-

posante perpendiculaire à SO :

$$\frac{u_1}{\omega} = \mathrm{SO}\left(1 + \frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{CO}}\right).$$

Soient m (*fig.* 70) le point décrivant supposé situé sur la circonférence mobile; C′ le centre de cette circonférence; J, H les projections de C′, S sur la normale Om; dans le cas de la figure, la suraccélération normale a pour valeur

Fig. 70.



$$\omega^3 . \mathrm{SH}\left(1 + \frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{CO}}\right);$$

et si l'on remarque que

$$\mathrm{V} = \omega . \mathrm{O}m, \quad \frac{d\mathrm{V}}{dt} = \omega^2 . \mathrm{SH}, \quad \frac{\mathrm{V}^2}{\rho} = \omega^2 . m\mathrm{H},$$

on a

$$\mathrm{SH}\left(1 + \frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{CO}}\right) = \frac{3m\mathrm{H}.\mathrm{SH}}{\mathrm{O}m} - \frac{\overline{m\mathrm{H}}^3}{\overline{\mathrm{O}m}^3}(\pm \mathcal{R}).$$

Or

$$\mathrm{SO} = \frac{\mathrm{OC}.\mathrm{OC}'}{\mathrm{CC}'}, \quad \mathrm{OH} = \frac{\mathrm{OJ}.\mathrm{OS}}{\mathrm{OC}'} = \frac{\mathrm{O}m}{2} \cdot \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CC}'},$$

d'où

$$m\mathrm{H} = \mathrm{O}m\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CC}'}\right);$$

en faisant ces substitutions, on trouve la formule connue

$$\mathcal{R} = \frac{\mathrm{SH}}{\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CC}'}\right)^2},$$

d'où l'on déduit, si l'on veut, que la développée de l'épicycloïde est elle-même une épicycloïde.

Remarque. — Lorsqu'une figure est mobile dans son plan suivant une loi géométrique connue, la considération

des accélérations ne fait connaître que $\frac{U}{\omega}$, ou la relation $\frac{U}{\omega} = \left(\frac{1}{\frac{1}{\Gamma} \pm \frac{1}{\Gamma'}}\right)$ entre les rayons de courbure Γ et Γ' des lieux géométriques des centres instantanés de rotation sur le plan fixe et sur le plan mobile de la figure, de sorte qu'elle n'est pas suffisante pour déterminer complétement ces deux rayons; mais si l'on s'occupe des suraccélérations on arrive à construire $\frac{u_2}{\omega}$, et la relation

$$\frac{u_2}{\omega} = \frac{U}{\omega}\left(\frac{\Gamma \pm \frac{U}{\omega}}{\Gamma}\right),$$

jointe à la précédente, permettra de trouver les deux rayons Γ et Γ'.

185. *Rayon de courbure de la développée de la ligne engendrée par un point d'une figure invariable entraînant avec elle une courbe qui doit rester constamment tangente à une courbe donnée.* — Soient (*fig.* 57, p. 189) ab la courbe fixe; $a'b'$ la courbe faisant partie de la figure mobile; A leur point de contact; A_1, A'_1 les points de ces deux courbes qui viennent au contact au bout du temps dt; C, C' les centres de courbure de ab, $a'b'$ au point A; O, O' les centres instantanés de rotation correspondant aux points de contact A, A_1; S, S' les centres des accélérations correspondant à O, O'; I, I' les projections de S, S' sur AC, A_1C; nous supposerons, pour fixer les idées, que les courbes opposent leur convexité.

On a (126)

$$C'I = \frac{\overline{OC'}^2}{CC'}.$$

Soient U_1, U_2 les composantes de la vitesse $U = \frac{OO'}{dt}$

du centre instantané de rotation suivant AC et la tangente commune en A aux deux courbes ; $\frac{U}{\omega}$ étant égal et perpendiculaire à la distance OS, est connu en grandeur et en direction et il en est par suite de même de $\frac{U_1}{\omega}$, $\frac{U_2}{\omega}$. Appelons u_1, u_2 les composantes parallèles à U_1, U_2 de la vitesse $u = \frac{SS'}{dt}$ de S ; si l'on remarque que l'angle $ACA_1 = \frac{U_2}{OC} dt$ et que $SI . \frac{U_2}{OC} dt$ est la projection de S'I' sur CA, on a

$$u_1 = -\frac{d}{dt}(C'I) + \frac{SI.U_2}{OC}.$$

Si, pour abréger l'écriture, nous représentons par Γ et Γ' les rayons de courbure CA, C'A, il vient :

$$C'I = \frac{(\Gamma' - AO)^2}{\Gamma + \Gamma'},$$

$$\frac{d}{dt}(C'I) = \frac{2(\Gamma' - AO)}{\Gamma + \Gamma'}\left(\frac{d\Gamma'}{dt} - \frac{dAO}{dt}\right) - \left(\frac{\Gamma' - AO}{\Gamma + \Gamma'}\right)^2\left(\frac{d\Gamma}{dt} + \frac{d\Gamma'}{dt}\right),$$

ou

$$\frac{d}{dt}(C'I) = \frac{2\,OC'}{CC'}\left(\frac{d\Gamma'}{dt} - \frac{dAO}{dt}\right) - \left(\frac{OC'}{CC'}\right)^2\left(\frac{d\Gamma}{dt} + \frac{d\Gamma'}{dt}\right).$$

Or, on a

$$\frac{dAO}{dt} = U_1,$$

et si l'on pose

$$AA_1 = ds, \quad AA'_1 = ds',$$

il est clair que

$$\frac{U_2 dt}{ds} = \frac{OC}{AC},$$

d'où

$$dt = \frac{OC}{AC} \cdot \frac{ds}{U_2};$$

on a de même

$$dt = \frac{OC'}{AC'} \cdot \frac{ds'}{U_2}.$$

Appelant $\Delta = \Gamma \frac{d\Gamma}{ds}$, $\Delta' = \Gamma' \frac{d\Gamma'}{ds'}$ les rayons de courbure des développées de ab, $a'b'$, on reconnaîtra facilement, en substituant dans $\frac{d\Gamma}{dt}$, $\frac{d\Gamma'}{dt}$ les valeurs ci-dessus de dt, que

$$\frac{d}{dt}(C'I) = \frac{2OC'}{CC'}\left(\frac{AC'}{OC'} \cdot \frac{U_2}{\Gamma'} \cdot \Delta' - U_1\right)$$
$$- \left(\frac{OC'}{CC'}\right)^2 \left(\frac{CA.U_2.\Delta}{OC.\Gamma} + \frac{AC'.U_2.\Delta'}{OC'.\Gamma'}\right);$$

enfin

$$\frac{u_1}{\omega} = \frac{U_2}{\omega}\left[-\frac{\Delta'}{CC'}\left(2 - \frac{OC'}{CC'}\right) + \left(\frac{OC'}{CC'}\right)^2 \frac{\Delta}{OC} + \frac{SI}{OC}\right]$$
$$- \frac{2OC'}{CC'} \cdot \frac{U_1}{\omega},$$

expression que l'on peut construire géométriquement.

Si, pour définir complétement le mouvement de la figure mobile, on assujettit l'un de ses points M à parcourir une courbe donnée, on connaîtra pour ce point la suraccélération normale $\mathcal{A}_n$ ou $\frac{\mathcal{A}_n}{\omega^2}$, par suite la projection, sur la droite qui joint M au centre instantané O, de $\frac{u}{\omega}$ qui sera par cela même complétement déterminée.

Ces considérations s'appliquent au cas où la courbe mobile est assujettie à passer par un point fixe A; il suffit de supprimer dans les résultats ci-dessus tous les termes en Δ et Γ et l'on trouve

$$\frac{u_1}{\omega} = \frac{U_2}{\omega}\left[-\frac{\Delta'}{AC'}\left(2 - \frac{OC'}{AC'}\right) + \frac{SI}{AO}\right] - \frac{2OC'}{AC'} \cdot \frac{U_1}{\omega}.$$

Lorsque la ligne mobile est une droite, la théorie ci-dessus est en défaut, puisque le point C′ est à l'infini; dans ce cas on a (126)

$$AI = 2OA + AC,$$

$$u_1 = \frac{d(AI)}{dt} + SI \cdot \frac{U_2}{OC} = 2\frac{d(OA)}{dt} + \frac{d(AC)}{dt} + \frac{SI.U_2}{OC}$$

$$= 2U_1 + \frac{d\Gamma}{dt} + \frac{SI}{OC} \cdot U_2.$$

Or

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d\Gamma}{ds} \cdot \frac{AC.U_2}{OC} = \frac{\Delta}{OC} \cdot U_2,$$

par suite

$$\frac{u_1}{\omega} = \frac{2U_1}{\omega} + \left(\frac{SI}{OC} + \frac{\Delta}{OC}\right) \cdot \frac{U_2}{\omega}.$$

Dans le cas où la courbe *ab* se réduit à un point A, il vient tout simplement

$$\frac{u_1}{\omega} = \frac{2U_1}{\omega} + \frac{SI}{OA} \cdot \frac{U_2}{\omega}.$$

Cette dernière relation est spécialement applicable à la recherche du rayon de courbure des développées de la *conchoïde* et de la *cissoïde*.

186. *De la déviation dans les enveloppes des courbes planes mobiles dans un plan.* — Soient O le centre instantané de rotation de la figure mobile; $Om = p$ la normale commune à la courbe mobile et à son enveloppe passant par le point O; α l'angle que forme p avec la normale à la vitesse U du centre instantané.

La courbe enveloppe, comme nous l'avons vu (162), peut être considérée comme engendrée par un point m entraîné dans le mouvement général de la figure par rapport à laquelle il décrirait, d'un mouvement relatif, la courbe mobile avec la vitesse $\frac{mm'}{dt} = w$.

En partant de ces considérations, nous avons trouvé (163), en appelant ρ', ρ les rayons de courbure de la courbe mobile et de son enveloppe, la relation

$$(a) \qquad \frac{\omega p + w}{\rho} = \omega + \frac{w}{\rho'}.$$

Nous arriverons à connaître la suraccélération normale dans le mouvement absolu et par suite la déviation et le rayon de courbure de la développée de la courbe enveloppe en appliquant ici le théorème sur les mouvements relatifs établi au n° 179.

La suraccélération d'entraînement donne la composante $\omega^2 (u_1 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha)$ suivant la normale Om; la suraccélération relative estimée suivant la même direction est représentée par $\frac{3w}{\rho'}\frac{dw}{dt} - \frac{w^3}{\rho'^3}(\pm \mathcal{R}')$, $\mathcal{R}'$ étant le rayon de courbure de la développée de la courbe mobile.

La suraccélération n° 3, du théorème invoqué ci-dessus, étant normale à Om, il n'y a pas lieu de s'en occuper; la suraccélération n° 4 est nulle, puisque l'on suppose constante la rotation instantanée; la suraccélération n° 5 se compose de deux autres de même nature, $3\omega\frac{dw}{dt}$, $3\omega\frac{w^2}{\rho'}$, correspondant aux accélérations tangentielle et normale relatives, respectivement parallèle et perpendiculaire à mO.

La vitesse absolue de m est $\omega p + w$; son accélération tangentielle, comme il est facile de le reconnaître, est la somme $\omega U \sin\alpha + \frac{dw}{dt}$ des accélérations semblables d'entraînement et relative. Si donc on désigne par $\mathcal{R}$ le rayon de courbure de la développée de la courbe enveloppe, on a

$$3\frac{(\omega p + w)}{\rho}\left(\omega U \sin\alpha + \frac{dw}{dt}\right) - \left(\frac{w + \omega p}{\rho}\right)^3 (\pm \mathcal{R})$$
$$= (u_1 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha)\,\omega^2 + 3\frac{w}{\rho'}\frac{dw}{dt} - \frac{w^3}{\rho'^3}(\pm \mathcal{R}') + 3\omega\frac{dw}{dt},$$

ou, en remplaçant $\frac{\omega p + \varpi}{\rho}$ par sa valeur (a),

$$3\left(\omega + \frac{\varpi}{\rho'}\right)\omega U \sin\alpha - \left(\omega + \frac{\varpi}{\rho'}\right)^3 (\pm \mathcal{R})$$
$$= (u_1 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha)\omega^2 - \frac{\varpi^3}{\rho'^3}(\pm \mathcal{R}'),$$

d'où

$$\pm \mathcal{R} = \frac{3\left(\omega + \frac{\varpi}{\rho'}\right)\omega U \sin\alpha + \frac{\varpi^3}{\rho'^3}(\pm \mathcal{R}') - (u_1 \cos\alpha + u_2 \sin\alpha)\omega^2}{\left(\omega + \frac{\varpi}{\rho'}\right)^3}.$$

Or $\frac{\varpi}{\rho'} = \frac{U \cos\alpha}{\rho' - p}$, en supposant que ρ' et p soient de même sens; dans le cas contraire, il faudrait remplacer p par $-p$; il vient donc

$$\pm \mathcal{R} = \frac{3\left(\frac{\frac{U}{\omega}\cos\alpha}{\rho' - p} + 1\right)\frac{U}{\omega}\sin\alpha + \left(\frac{\frac{U}{\omega}\cos\alpha}{\rho' - p}\right)^3 (\pm \mathcal{R}') - \left(\frac{u_1}{\omega}\cos\alpha + \frac{u_2}{\omega}\sin\alpha\right)}{\left(\frac{U}{\omega}\frac{\cos\alpha}{\rho' - p} + 1\right)^3},$$

formule dont on fera facilement l'application lorsque le mouvement géométrique de la figure sera défini par des conditions suffisantes pour trouver u_1 et u_2, ainsi qu'on l'a vu plus haut.

Nous nous bornerons à vérifier cette formule en l'appliquant au profil des dents de l'engrenage à flancs; dans ce cas

$$\mathcal{R}' = 0, \quad u_1 = 0, \quad \rho' = \infty, \quad \frac{U}{\omega} = \frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma + \Gamma'}, \quad \frac{u_2}{\omega} = \frac{U}{\omega}\left(1 + \frac{\frac{U}{\omega}}{\Gamma}\right);$$

d'où

$$\mathcal{R} = \frac{U}{\omega}\sin\alpha\left(2 - \frac{\Gamma'}{\Gamma + \Gamma'}\right) = \frac{\Gamma\Gamma'(2\Gamma + \Gamma')}{(\Gamma + \Gamma')^2}\sin\alpha.$$

Or on sait que l'enveloppe est l'épicycloïde décrite par un point de la circonférence de rayon $\frac{\Gamma'}{2}$ roulant sur la circonférence de rayon Γ; de sorte que, d'après ce que l'on a vu plus haut (184), on a

$$\mathcal{R} = \frac{\Gamma \cdot \frac{\Gamma'}{2}}{\Gamma + \frac{\Gamma'}{2}} \sin\alpha \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma + \frac{1}{2}\Gamma'}} \right)^2 = \frac{\Gamma\Gamma'(2\Gamma + \Gamma')\sin\alpha}{(\Gamma + \Gamma')^2},$$

résultat qui coïncide bien avec le précédent.

187. *Des suraccélérations des différents ordres dans l'hypothèse d'une rotation instantanée uniforme.* — Nous n'avons considéré jusqu'ici que l'accroissement géométrique rapporté à l'unité de temps de l'accélération, ou la suraccélération; mais on pourrait pousser les choses beaucoup plus loin et étudier les propriétés de la quantité semblable relative à la suraccélération ou ce que nous appellerons *suraccélération seconde;* de celle qui dérive de cette dernière grandeur et que nous désignerons sous le nom de *suraccélération tierce*, et ainsi de suite.

En nous bornant à nous occuper de mouvements purement géométriques d'une figure plane pour lesquels les rotations instantanées successives peuvent être supposées égales entre elles, nous allons chercher à établir d'une manière générale que pour les suraccélérations de tous les ordres il existe un centre jouissant de la même propriété que les centres des accélérations et des suraccélérations premières.

Le point C (*fig.* 68, p. 296) étant toujours le centre instantané de rotation de la figure, considérons le point S comme un point mobile suivant une certaine loi avec la vitesse u, et dont S′ est la position infiniment voisine au

bout du temps dt. Soient m, m' les positions d'un point de la figure, contemporaines de S, S', et conservons les notations établies plus haut.

Désignons par n un nombre entier quelconque et concevons que l'on porte à partir de m, sur la perpendiculaire en ce point menée à $Sm = R$, une longueur égale à $\omega(-\omega^2)^n.Sm$, dans le sens de ω par rapport à S ou en sens inverse, selon que cette quantité sera positive ou négative.

La longueur semblable relative à m' et S' étant égale, $\omega(-\omega^2)^n.S'm'$, l'accroissement géométrique de $\omega(-\omega^2)^n.Sm$ sera évidemment la résultante des longueurs :

$$mm'.\omega(-\omega^2)^n = \omega^2 R(-\omega^2)^n dt,$$

dirigée de m vers C ou en sens inverse, selon qu'elle sera positive ou négative ;

$$SS'.(-\omega^2)^n = u\omega(-\omega^2)^n dt,$$

dirigée suivant u que l'on aurait fait tourner de 90° autour de S dans le sens de ω ou en sens inverse, selon que $(-\omega^2)^n$ sera positif ou négatif.

Il résulte de là que la dérivée géométrique de $\omega(-\omega^2)^n.Sm$ rapportée à l'unité de temps aura pour composantes

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \omega^2 R(-\omega^2)^n, \\ u\omega(-\omega^2)^n, \end{cases}$$

dont la direction et le sens sont définis ainsi que l'on vient de le dire.

Il est clair qu'il existe sur la perpendiculaire abaissée de C, sur la direction de u, un point T et qui est unique pour lequel ces deux composantes sont égales et de sens contraire. Or $\omega^2(-\omega^2)^n R$ se compose de $\omega^2(-\omega^2)^n CT$ égale et opposée à $u\omega(-\omega^2)^n$ et de $\omega^2(-\omega^2)^n.Tm$, et l'on voit que l'accroissement géométrique relatif à m est abso-

lument le même que si la figure, au lieu d'avoir pour centre instantané le point C, tournait effectivement autour du point S supposé fixe avec la vitesse angulaire ω.

Cherchons maintenant à évaluer l'accroissement géométrique rapporté à l'unité de temps, de la longueur $\omega^2(-\omega^2)^n.Sm$ portée de m vers S ou en sens inverse, selon qu'elle est positive ou négative.

On reconnaît sans difficulté que cet accroissement a pour composantes

$$(B)\quad \begin{cases} -\omega^2(-\omega^2)^n \dfrac{mm'}{dt} = -\omega^3(-\omega^2)^n R, \\ \text{dirigée perpendiculairement à } Sm \text{ en } m, \text{ dans le sens} \\ \text{de } \omega \text{ par rapport à S ou en sens inverse, selon qu'elle} \\ \text{est positive ou négative,} \\ u\omega^2(-\omega)^n, \\ \text{dirigée suivant } u \text{ ou en sens inverse, selon qu'elle est} \\ \text{positive ou négative.} \end{cases}$$

Si l'on considère la première de ces composantes comme le résultat d'une rotation $-\omega^3(-\omega^2)^n$ autour de C, et la seconde comme une translation parallèle à u, on voit qu'il existe sur la perpendiculaire abaissée de C sur u un point T donné par la formule $CT = \frac{u}{\omega}$, pour lequel l'accroissement géométrique est nul, et qui est tel, que l'accroissement géométrique relatif à m est le même que si la figure, au lieu d'avoir C pour centre instantané, tournait autour de ce point T supposé fixe avec la vitesse angulaire ω.

Ces généralités établies, il est facile d'en déduire les propriétés relatives à l'accélération et aux suraccélérations des divers ordres.

En premier lieu, si on suppose que S se confonde avec le centre instantané C dont u serait la vitesse et que l'on fasse

$n = 0$ dans les formules (A), on obtiendra les composantes de l'accroissement géométrique de $\omega . Cm$, c'est-à-dire de l'accélération ; T deviendra le centre des accélérations, et l'accélération de m, représentée par $\omega^2 Tm$, sera la même que si la figure tournait effectivement autour du point T supposé fixe avec la vitesse angulaire ω.

Si l'on suppose que S représente le centre des accélérations, u sa vitesse, et que l'on fasse $n = 0$ dans les expressions (B), on obtient les composantes de l'accroissement géométrique $\omega^2 . mT$, c'est-à-dire de la suraccélération première ; T devient le centre des accélérations, et la suraccélération de chaque point m de la figure $-\omega^3 . mT$ est la même que si la figure était animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de T supposé fixe.

La suraccélération tierce s'obtiendra en supposant $n = 1$ dans (B), S étant le centre des accélérations secondes et u sa vitesse ; elle a pour valeur $\omega^5 . mT$, comme si la figure était animée d'un mouvement circulaire uniforme autour de T, et ainsi de suite.

On voit ainsi : 1° que les formules (A) donnent les composantes des accélérations d'ordre pair représentées par l'indice général $2n$, u étant la vitesse du centre des suraccélérations de l'ordre $2n - 1$; 2° que les formules (B) s'appliquent aux suraccélérations d'ordre impair dont l'indice général est $2n + 1$, u étant la vitesse du centre des suraccélérations de l'ordre $2n$, et l'on a cet énoncé général.

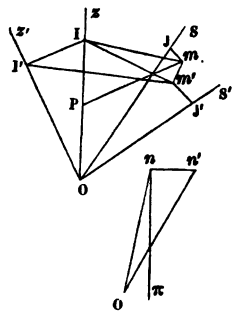
Dans le mouvement géométrique d'une figure plane dans son plan, il existe à chaque instant un point de cette figure dont la suraccélération d'un ordre déterminé est nulle, et ce point ou centre des suraccélérations est tel, que la suraccélération du même ordre d'un point quelconque de la figure est la même que si la figure tournait effectivement autour de ce centre supposé fixe.

Enfin les formules (A) et (B) constituent un théorème dont il est facile de trouver l'énoncé.

§ V. — De la Suraccélération dans le mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe.

188. Soient O le point fixe (*fig.* 71); Oz, Oz' deux positions consécutives de l'axe instantané de rotation; m, m' les positions correspondantes d'un point du système; OS, OS′ l'axe de l'accélération angulaire au premier et au second instant; $m\mathrm{I} = r$, $m'\mathrm{I}'$ les perpendiculaires abaissées de m, m' sur Oz, Oz'; $m\mathrm{J} = q$, $m'\mathrm{J}'$ les perpendiculaires abaissées de ces mêmes points sur OS, OS′; α l'accélération angulaire et μ sa composante perpendiculaire à Oz; OI $= z$; φ l'angle IOm ou IOm'; θ l'angle dièdre z'Ozm'; l'angle z'Oz étant égal à $\frac{\mu}{\omega}dt$, l'angle trièdre z'Ozm' donne

Fig. 71.



$$\cos\varphi' = \cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\mu}{\omega}\,dt\cos\theta,$$

d'où, par la projection de II′ sur Oz,

$$\mathrm{II}'\cos\mathrm{I}'\mathrm{IO} = \mathrm{O}m'(\cos\varphi' - \cos\varphi) = \mathrm{O}m'\,\frac{\mu}{\omega}\,dt\sin\varphi\cos\theta$$
$$= \frac{r\mu}{\omega}\cos\theta\,dt.$$

La projection de II′ sur une perpendiculaire à Oz, dans le plan zOz', est d'ailleurs

$$\mathrm{II}'\sin\mathrm{I}'\mathrm{IO} = z\,\frac{\mu}{\omega}\,dt.$$

L'accélération centripète $(\omega^2 + d.\omega^2)m'\mathrm{I}'$ de m' autour

de Oz' (129) se compose des trois suivantes :

$$-\omega^2 mm' = -\omega^3 r dt \quad \text{suivant } \omega r,$$

$$(\omega^2 + d\omega^2) r = \omega^2 r + 2\omega r \frac{d\omega}{dt} dt \quad \text{suivant } m\mathrm{I},$$

$$\omega^2 \mathrm{II}' \quad \text{suivant } \mathrm{II}'.$$

L'accélération centripète donne ainsi les suraccélérations

$$-\omega^3 r \quad \text{suivant } \omega r,$$

$$2\omega r \frac{d\omega}{dt} \quad \text{suivant } r,$$

$$\omega^2 . \mathrm{II}' \quad \text{suivant II}' \text{ qui se décompose elle-même}$$

$$\text{en} \begin{cases} \omega \mu r \cos\theta \text{ suivant } r, \\ \omega \mu z \text{ parallèle à } \mu. \end{cases}$$

Appelons α' *la suraccélération angulaire* et s la distance de m à la droite qui la représente.

L'accélération angulaire $(\alpha + d\alpha)$ autour de OS' se compose de la même accélération autour de OS' et de $\alpha' dt$ qui donne lieu à la suraccélération $\alpha' s$.

Soient n, n' les projections de m, m' sur un plan perpendiculaire à OS, passant par exemple par le point O; $\chi = \frac{nn'}{dt}$ la projection sur ce plan de la vitesse ωr.

L'accélération $(\alpha + d\alpha) On'$ se compose de $(\alpha + d\alpha) nO$ et de $(\alpha + d\alpha) nn' = \alpha\chi dt$, respectivement perpendiculaires à On et à χ suivant $n\pi$. Il suit de là que l'accélération angulaire donne lieu à la suraccélération due à l'accélération angulaire, à la suraccélération $\alpha\chi$ dont la direction s'obtient en supposant que χ tourne dans un plan perpendiculaire à OS de 90° dans le sens de α et de la suraccélération $q \frac{d\alpha}{dt}$ autour de l'axe de α.

Dans le cas de mouvements purement géométriques on

peut, comme nous le ferons dorénavant, supposer $\frac{d\omega}{dt} = 0$, $\frac{d^2\omega}{dt^2} = 0$; la suraccélération angulaire est dès lors située dans le plan osculateur à la courbe sphérique de rayon ω, de centre O, tracée sur la surface conique déterminée par les positions successives de l'axe Oz; $\frac{d\alpha}{dt}$ devient $\frac{d\mu}{dt}$ et représente la projection de α' sur μ; enfin on a $\chi = -\omega r \cos\theta$ et les suraccélérations $\alpha\chi$ et $\omega\mu z \cos\theta$ se détruisent.

Les composantes de la suraccélération se réduisent donc aux suivantes :

$$-\omega^3 r \ldots\ldots\ldots \quad \text{suivant } \omega r,$$

$$\omega\mu z \ldots\ldots\ldots \quad \text{parallèle à } \mu,$$

et à la suraccélération due à la suraccélération angulaire α'.

189. Soient Γ, Γ' les rayons de courbure principaux, à la distance ω du point O, des cônes roulant l'un sur l'autre que déterminent les positions successives de l'axe instantané de rotation dans l'espace et dans le système mobile; Λ, Λ' les rayons de courbure des courbes déterminées dans ces deux cônes par la sphère de centre O et de rayon ω; Θ l'angle formé par le plan osculateur à la première de ces courbes avec le plan tangent zOz' commun aux cônes. La suraccélération angulaire α' n'est autre chose que l'accélération d'un point mobile qui se mouvrait sur la première de ces courbes sphériques avec la vitesse μ; elle a aussi pour composantes

$$\frac{d\mu}{dt} \quad \text{suivant} \quad \mu,$$

$$\frac{\mu^2}{\Lambda} \quad \text{suivant} \quad \Gamma;$$

α donne par suite la suraccélération

$$z\frac{d\mu}{dt} \text{ autour d'une parallèle à } \mu \text{ menée par le point O,}$$

et la suraccélération due à l'accélération angulaire $\frac{\mu^2}{\Lambda}$ autour de Λ dans le sens de μ.

Cela posé, cherchons à exprimer μ, $\frac{d\mu}{dt}$ en fonction des éléments des deux cônes; en premier lieu, on a d'après le n° 132, en ayant égard au changement de notation,

$$\mu = \frac{\omega^2}{\frac{1}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma'}},$$

si nous admettons, pour fixer les idées, que les cônes opposent leurs convexités; d'où

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{\mu^2}{\omega}\left(\frac{d\frac{1}{\Gamma}}{dt} + \frac{d\frac{1}{\Gamma'}}{dt}\right).$$

D'autre part, le théorème de Meusnier donne

$$\Lambda = \Gamma \sin\Theta,$$

$$\Lambda = \omega\cos\Theta,$$

d'où

$$\frac{1}{\Gamma} = \sqrt{\frac{1}{\Lambda^2} - \frac{1}{\omega^2}},$$

$$\frac{d\frac{1}{\Gamma}}{dt} = -\frac{\Gamma}{\Lambda^3}\cdot\frac{d\Lambda}{dt} = -\frac{\Gamma\mu}{\Lambda^4}\frac{d\Lambda}{\mu dt}\Lambda.$$

Or (170) $\Lambda\cdot\frac{d\Lambda}{\mu dt}$ n'est autre chose, au signe près, que le

rayon de courbure principal Δ de la surface polaire de la courbe sphérique du premier cône, au centre de courbure. Il vient donc, en appelant Δ' le rayon semblable relatif au second cône, et supposant que Δ et Δ' portent leurs signes,

$$\frac{d\frac{1}{\Gamma}}{dt} = -\mu\frac{\Gamma}{\Lambda^4}\cdot\Delta,$$

$$\frac{d\frac{1}{\Gamma'}}{dt} = -\mu\frac{\Gamma'}{\Lambda'^4}\cdot\Delta',$$

d'où

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\mu^3}{\omega}\left(\frac{\Gamma}{\Lambda^4}\cdot\Delta + \frac{\Gamma'}{\Lambda'^4}\cdot\Delta'\right).$$

Enfin la suraccélération angulaire $\frac{\mu^2}{\Lambda}$ se compose des suivantes :

$$\frac{\mu^2}{\Lambda}\sin\Theta = \frac{\mu^2}{\Gamma} \quad \text{suivant } \Gamma,$$

$$\frac{\mu^2}{\Lambda}\cos\Theta = \frac{\mu^2}{\omega} \quad \text{suivant } z.$$

Il résulte de là que la suraccélération a pour composantes :

$$-\omega^3 r + \frac{\mu^2}{\omega} r \qquad \text{suivant } \omega r,$$

$$\omega\mu z \qquad \text{suivant } \mu,$$

$$\frac{\mu^3}{\omega} z\left(\frac{\Gamma}{\Lambda^4}\Delta + \frac{\Gamma'}{\Lambda'^4}\cdot\Delta'\right) \qquad \text{autour de } \mu,$$

$$\frac{\mu^2}{\Gamma}\sqrt{z^2 + r^2\cos^2\Theta} \qquad \text{autour de } \Gamma,$$

d'où l'on déduira sans peine, lorsque les deux cônes rou-

lants seront donnés, les suraccélérations normale et binormale, par suite la courbure de la surface polaire et le rayon de cambrure de la trajectoire d'un point quelconque du système mobile.

Posons

$$\mu = \mu_1 \omega^2,$$

μ_1 étant une tangente trigonométrique que l'on sait construire, et appelons Γ_1, Γ'_1, Δ_1, Δ'_1, Δ'_1 ce que deviennent pour la distance z au sommet, les quantités représentées par les mêmes lettres pour la distance ω, auxquelles elles sont proportionnelles.

Les composantes de la suraccélération se mettent d'abord sous la forme

$$(1) \qquad \omega^3(-r + \mu_1^2 r) \qquad \text{suivant } \omega r,$$

$$(2) \qquad \omega^3 \mu_1 z \qquad \text{suivant } \mu,$$

$$(3) \qquad \omega^3 \mu_1^3 z^3 \left(\frac{\Gamma_1}{\Delta_1^4}\Delta_1 + \frac{\Gamma'_1 \Delta'_1}{\Delta_1^4}\right) \qquad \text{autour de } \mu,$$

$$(4) \qquad \frac{\omega^3 \mu_1^2 z}{\Gamma_1}\sqrt{z^2 + r^2 \cos^2\Theta}, \qquad \text{autour de } \Gamma,$$

expressions dans lesquelles les coefficients de ω^3 sont susceptibles de constructions géométriques.

190. Supposons, comme application, que les cônes roulants soient circulaires et extérieurs l'un à l'autre, en d'autres termes que l'on veuille étudier les propriétés de l'épicycloïde sphérique. Dans ce cas la composante (3) est nulle, et les composantes (2) et (4) concourent seules à donner les suraccélérations normale et binormale. La composante (2) donne la suraccélération $\omega^3 \mu_1 z \sin\theta$ suivant r et une suraccélération suivant ωr, dont il est inutile de tenir compte.

La suraccélération angulaire $\omega^3 \frac{\mu_1^2 z}{\Gamma_1}$ se compose de deux autres, $-\omega^3\mu_1^2 \cdot \frac{z}{\Gamma_1}$ suivant r, $-\omega^3\mu_1^2 \cdot \frac{z}{\Gamma_1} \cos\theta$ suivant une perpendiculaire au plan mSz; la première donne la suraccélération $-\omega^3\mu_1 \frac{z}{\Gamma_1} \sin\theta$, dirigée suivant ωr que nous laisserons de côté; la seconde, la suraccélération $\omega^3\mu_1^2 \frac{z}{\Gamma_1} \cos\theta . Sm$, perpendiculaire à Sm dont il est facile de déterminer le sens.

Cela posé, soient α l'angle formé par Sm avec Sz; δ l'angle mPz formé par la normale mP à la courbe avec Sz; $Sm = i$ le rayon de la sphère; nous avons trouvé au n° 132, en ayant égard au changement de notations,

$$\tang \delta = \frac{1}{\mu_1 \sin\theta} - \cot\alpha,$$

et l'on déduit de ce qui précède pour les suraccélérations normale et binormale :

$$\mathcal{A}_n = \omega^3\mu_1 z \cos\delta + \frac{\omega^3\mu_1^2 z \cos\theta . i}{\Gamma_1} \sin(\delta - \alpha),$$

$$\mathcal{A}_b = \omega^3\mu_1 z \sin\delta - \frac{\omega^3\mu_1^2 z \cos\theta . i}{\Gamma_1} \cos(\delta - \alpha).$$

Le rayon de courbure de l'épicycloïde étant

$$\rho = i \cos(\delta - \alpha),$$

le rayon de cambrure ρ_1 sera donné par la formule

$$\frac{r^3}{\rho\rho_1} = \mu_1 z \sin\delta - \frac{\mu_1^2 z \rho \cos\theta}{\Gamma_1},$$

qui est susceptible d'une construction géométrique, en supposant que le rayon de courbure ρ ait été déterminé en grandeur et en direction.

L'accélération tangentielle a pour valeur

$$\frac{dV}{dt} = \mu z \cos\theta = \omega^2 \mu_1 z \cos\theta,$$

par suite

$$\frac{\mathcal{A}_n}{\omega^3} = \frac{3r}{\rho}\mu_1 z \cos\theta - \frac{r^3}{\rho^3}(\pm\mathcal{R}),$$

d'où pour le rayon de courbure principal de la surface polaire au centre de courbure

$$\pm\mathcal{R} = \left[\frac{3r}{\rho}\mu_1 z\cos\theta - \mu_1 z\cos\delta - \frac{\mu_1^2 . zi\cos\theta}{\Gamma_1}\sin(\delta-\alpha)\right]\frac{\rho^3}{r^3},$$

expression que l'on pourra construire géométriquement.

191. *Relations entre les rayons de cambrure et de courbure de surfaces polaires dans les courbes déterminées dans les dents des engrenages coniques par une même sphère concentrique au sommet des cônes primitifs.* — Reportons nous au n° 170 en supposant les cônes circulaires dans la *fig.* 58, p. 195; appelons $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ les rayons de courbure principaux des surfaces polaires aux centres de courbure de la courbe sphérique mobile et de son enveloppe; ρ'_1, ρ_1 les rayons de cambrure de ces mêmes courbes.

Nous avons trouvé au numéro précité, aux notations près,

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{1}{\mu_1 \sin\theta} + \operatorname{tang}\delta',$$

$$w = \mu_1 \rho' \frac{\sin\theta}{\cos\delta'} \cdot \omega = \omega \frac{i\cos(\delta'-\alpha)\cos\delta}{\sin(\delta-\delta')}.$$

Dans le mouvement absolu du point m, l'accélération tangentielle est, comme il est facile de s'en assurer, la somme $\omega^2\mu_1 z\cos\theta + \frac{dw}{dt}$ des accélérations semblables d'entraînement et relative.

La suraccélération absolue a pour composantes

normale, $\frac{3(\omega r+w)}{\rho}\left(\omega^2\mu_1 z\cos\theta+\frac{dw}{dt}\right)-\left(\frac{\omega r+w}{\rho}\right)^3(\pm\mathfrak{R})$,

binormale, $\frac{(\omega r+w)^3}{\rho\rho_1}$.

Les composantes normale et binormale dans le mouvement relatif du point mobile ont pour expression

$$\frac{3w}{\rho'}\frac{dw}{dt}-\frac{w^3}{\rho'^3}(\pm\mathfrak{R}'),\quad \frac{w^3}{\rho'_1\rho'}.$$

D'après ce qui précède, la suraccélération d'entraînement a pour composantes suivant la normale et la binormale à la courbe sphérique enveloppe :

$$\omega^3\left[\mu_1 z\cos\delta+\frac{\mu_1^2}{\Gamma_1}zi\cos\theta\sin(\delta-\alpha)\right],$$
$$\omega^3\left[\mu_1 z\sin\delta-\frac{\mu_1 z}{\Gamma_1}i\cos\theta\cos(\delta-\alpha)\right].$$

La suraccélération n° 4 du théorème du n° 179 sur les mouvements relatifs, représentée par $-3\mu_1\omega^2 w\sin\theta$, est dirigée suivant Oz.

La suraccélération n° 5 du même théorème donne la seule composante $3\omega\frac{dw}{dt}$ dans le plan SOz suivant r, dirigée de m vers I.

On a donc, en faisant l'application du théorème ci-dessus,

$$3\left(\frac{\omega r+w}{\rho}\right)\left(\omega^2\mu_1 z\cos\theta+\frac{dw}{dt}\right)-\frac{(\omega r+w)^3}{\rho}(\pm\mathfrak{R})$$
$$=\left[\frac{3w}{\rho'^2_1}\frac{dw}{dt}-\frac{w^3}{\rho'^3}(\pm\mathfrak{R}')\right]\cos(\delta-\delta')-\frac{w^3}{\rho'\rho'_1}\sin(\delta-\delta')$$
$$+\omega^3\left(\mu_1 z\cos\delta+\frac{\mu_1^2 zi}{\Gamma_1}\cos\theta\sin(\delta-\alpha)\right.$$
$$+3\mu_1\omega^2 w\sin\theta\cos\delta+3\omega\frac{dw}{dt}\sin\delta,$$

et

$$\frac{(\omega r + w)^3}{\rho\rho_1} = \frac{w^3}{\rho'\rho'_1}\cos(\delta - \delta') - \left[\frac{3w}{\rho'}\frac{dw}{dt} - \frac{w^3}{\rho'^3}(\pm\mathcal{R}')\right]\sin(\delta - \delta')$$
$$+ \left(\mu_1 z \sin\delta - \frac{\mu_1^2}{\Gamma_1} zi \cos\theta \cos(\delta - \alpha)\right)\omega^3$$
$$+ 3\mu_1\omega^2 w \sin\theta \sin\delta - 3\omega\frac{dw}{dt}\cos\delta.$$

Pour simplifier ces formules, nous remarquerons que

$$\frac{\omega r + w}{\rho} = \frac{\omega}{\cos(\delta - \alpha)}\left[\sin\alpha + \frac{\cos\delta.\cos(\delta' - \alpha)}{\sin(\delta - \delta')}\right] = \frac{\omega\cos\delta'}{\sin(\delta - \delta')},$$

$$\frac{w}{\rho'} = \frac{\omega\cos\delta}{\sin(\delta - \delta')};$$

les termes en $\frac{dw}{dt}$ disparaissant, il vient en réduisant

$$\pm\mathcal{R} = \frac{1}{\cos^3\delta'}\left\{\begin{array}{l} 3\mu_1\sin^2(\delta - \delta')(z\cos\theta\cos\delta' - \rho'\sin\theta\cos^2\delta) \\ +\cos^3\delta\cos(\delta - \delta')(\pm\mathcal{R}') + \cos^3\delta\frac{\rho'^2}{\rho_1}\sin(\delta - \delta') \\ -\sin^3(\delta - \delta')\left(\mu_1 z\cos\delta + \frac{\mu_1^2}{\Gamma_1}zi\cos\delta.\sin(\delta - \alpha)\right) \end{array}\right\},$$

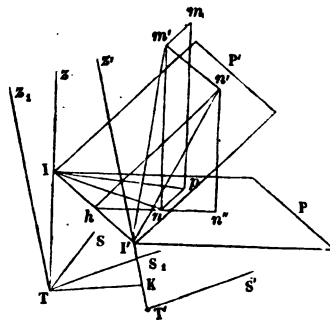
$$\frac{\rho^3}{\rho_1} = \frac{\cos^3\delta}{\cos^3\delta'}\left\{\begin{array}{l} \frac{\rho'^2}{\rho'_1}\cos(\delta - \delta') + \sin(\delta - \delta')(\pm\mathcal{R}') \\ +\mu_1 z\left[\sin\delta - \mu_1\frac{i}{\Gamma_1}\cos\theta\cos(\delta - \alpha)\right]\sin^3(\delta - \delta') \\ +3\mu_1\rho'\cos\delta\sin\delta\sin\theta\sin^2(\delta - \delta') \end{array}\right\}.$$

On pourrait encore simplifier ces formules, de manière à les rendre plus accessibles aux constructions géométriques; mais nous n'insisterons pas davantage sur cette question dont nous n'avons indiqué la solution que pour donner une idée des ressources que l'on peut tirer de la Cinématique dans certaines parties fort épineuses de la Géométrie.

§ V. — De la Suraccélération dans le mouvement le plus général d'un système invariable.

192. Soient (*fig.* 72) T, T′ deux positions consécutives du centre des accélérations; Tz, T′z' les parallèles en T, T′ aux positions correspondantes de l'axe instantané; II′ la plus courte distance de ces droites, que nous désignerons par Wdt; TS, T′S′ les axes de l'accélération angulaire en T et T′; TK $= \mho dt$ la distance du point T à T′S′; Tz_1, TS$_1$ les parallèles en T menées à T′z', T′S′.

Fig. 72.



On peut considérer le mouvement comme résultant d'une rotation ω autour de Oz et d'une translation oblique à cet axe, que nous supposons connue en grandeur et en direction.

La rotation $(\alpha + d\alpha)$ autour de T′S′ est équivalente à une même rotation autour de TS$_1$ et à une translation $(\alpha + d\alpha)\mho dt = \alpha \mho dt$ perpendiculaire au plan STK et dont le sens est connu.

Il résulte de là que la suraccélération provenant de l'accélération angulaire se compose de $\mho\alpha$ perpendiculaire au plan STK et des composantes qui résulteraient de l'hypothèse du point T supposé fixe, et que nous devons évaluer; seulement la projection que nous avons appelée χ au n° 188 représente ici celle de la résultante des vitesses de rotation et de translation.

Soient P, P′ les plans menés par II′ perpendiculairement à Iz, I′z'; n, n' les projections sur ces deux plans de la position m' qu'occupe m au bout du temps dt; p la projection de m sur le plan P; nI $= r$, n'I′ les distances du point m

aux axes Iz, I$'z'$; $n'h$, $n'n''$ les perpendiculaires abaissées de n' sur II$'$ et sur le plan P; φ l'angle pII$'$ formé par r avec W, égal à un infiniment petit du premier ordre près aux angles nII$'$, $180^\circ - n'$I$'$I; on peut considérer de même n'I$'$ et $mp = z$ comme ayant respectivement la même longueur que r et $m'n'$; soit de plus $\zeta = \frac{np}{dt}$ la projection de la vitesse de m sur le plan P.

En continuant à désigner par μ l'accélération angulaire normale à Oz, l'angle des deux plans P et P$'$ est égal à $\frac{\mu}{\omega} dt$, et l'on a

$$n'n'' = n'h \cdot \frac{\mu}{\omega} dt = n'\mathrm{I}' \sin n'\mathrm{I}'h \cdot \frac{\mu}{\omega} dt = r \sin\varphi \frac{\mu}{\omega} dt,$$

$$nn'' = m'n' \frac{\mu}{\omega} dt = z \frac{\mu}{\omega} dt.$$

L'accélération centripète $(\omega^2 + d\omega^2) n'\mathrm{I}'$ relative à l'axe I$'z'$, dirigée suivant n'I$'$, étant proportionnelle à cette longueur qui est la ligne résultante du polygone gauche I$'$I$pnn''n'$, est la résultante des suivantes :

$(\omega^2 + d\omega^2)\mathrm{I}p = \omega^2 r + 2\omega r \frac{d\omega}{dt} dt$, dirigée suivant r, de p vers I,
$(\omega^2 + d\omega^2)pn = \omega^2 \zeta dt$, dirigée de n vers p, ou suivant ζ,
$(\omega^2 + d\omega^2)n''n = \omega\mu z dt$, dirigée de n vers h,
$(\omega^2 + d\omega^2)n''n' = \omega\mu r \sin\varphi dt$, dirigée de n' vers n'',
$(\omega^2 + d\omega^2)\mathrm{II}' = \omega^2 \mathrm{W} dt$, dirigée suivant W.

Il résulte de là que l'accélération centripète donne lieu aux suraccélérations :

$2\omega r \frac{d\omega}{dt}$, dirigée suivant r, vers l'axe de rotation,
$-\omega^2\zeta$, dirigée suivant ζ,
$-\omega\mu z$, dirigée suivant z,
$\mu r \sin\varphi$, dirigée suivant la projection sur le plan P de la perpendiculaire abaissée de m sur W,
ω^2W, dirigée suivant W.

La vitesse W étant perpendiculaire au plan STz, doit être considérée comme connue en direction, mais non en grandeur, en position, ni quant au sens; la vitesse U est complétement inconnue.

Les conditions auxquelles le mouvement du système est assujetti, s'il s'agit de déplacements géométriques, serviront à déterminer ce qu'il y a d'inconnu dans U et W.

NOTES.

NOTE I.

SUR LE MOUVEMENT PENDULAIRE.

Lorsque l'on imprime une vitesse horizontale à un pendule simple peu écarté de la verticale, on observe que la courbe décrite, en projection horizontale, n'est pas une ellipse, mais une sorte de spirale à spires allongées, dont les rayons vecteurs maxima et minima partant de la trace horizontale de la verticale du point de suspension éprouvent un déplacement augulaire dans le sens du mouvement pendulaire. L'effet produit est à peu près le même que si, le pendule décrivant une ellipse, cette ellipse tournait autour de son centre, de la gauche vers la droite, en supposant, par exemple, que le mouvement pendulaire ait lieu de la gauche vers la droite pour l'observateur couché le long de la verticale de suspension. Cette différence entre l'observation et la théorie exposée dans le texte, et que l'on retrouve sous une forme analytique dans tous les Traités de Mécanique rationnelle, tient uniquement à ce que l'approximation adoptée n'est pas assez grande; mais, pour aller plus loin, la géométrie devient insuffisante, et il faut avoir recours à l'analyse.

Soient (*fig.* 17, p. 50) :

l la longueur OB du pendule ;

ψ l'angle très-petit qu'il forme avec la verticale ;

φ l'angle azimutal du plan vertical OBA qui le renferme avec un plan vertical fixe ;

g l'accélération de la gravité ;

$n^2 = \frac{l}{g}$.

Le mouvement de la droite OB peut être considéré comme résultant de deux rotations, l'une $\frac{d\varphi}{dt}$ autour de la verticale OA, et l'autre $\frac{d\psi}{dt}$ autour de la perpendiculaire en O au plan BOA. Il résulte de là que la vitesse v du point B a pour composantes

$$\mathrm{BD} \times \frac{d\varphi}{dt} = l \sin\psi \frac{d\varphi}{dt}, \quad l\frac{d\psi}{dt},$$

la première perpendiculaire au plan BOD, la seconde comprise dans ce plan et perpendiculaire à OB. On a ainsi

$$v^2 = l^2 \sin^2\psi \frac{d\varphi^2}{dt^2} + l^2 \frac{d\psi^2}{dt^2},$$

et d'après la formule du n° 63,

$$l^2 \sin^2\psi \frac{d\varphi^2}{dt^2} + l^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} = 2gl(\cos\psi + \mathrm{A}),$$

en représentant, pour abréger, par $2gl\mathrm{A}$ (A étant une constante) le carré de la vitesse initiale diminué du produit de $2gl$ par le cosinus de la valeur initiale de $\cos\psi$.

Le point B en projection horizontale (54) ne pouvant posséder qu'une accélération dirigée suivant le rayon vecteur émanant de la trace de la verticale de suspension, les aires décrites par le rayon (69) sont proportionnelles aux

temps écoulés, et l'on peut ainsi poser

$$l^2 \sin^2\psi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l^2 B\sqrt{2}}{n},$$

B étant une autre constante dépendant des conditions initiales du mouvement; d'où

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{B\sqrt{2}}{n} \cdot \frac{1}{\sin^2\psi}.$$

Cette valeur, portée dans l'équation précédente, conduit à

$$(2) \qquad dt = \frac{n}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos^3\psi - A\cos^2\psi + A - B^2}}.$$

L'équation

$$(3) \qquad \cos^3\psi + A\cos^2\psi - \cos\psi - (A - B^2) = 0$$

a au moins une racine réelle qui représente un maximum ou un minimum de ψ. Or par la nature de la question, s'il y a un maximum, il y a nécessairement un minimum, et par conséquent cette équation a deux racines, et par suite ses trois racines réelles.

Soient α et β le maximum et le minimum de ψ, $\cos\beta$ et $\cos\alpha$ étant la plus grande et la plus petite des racines de l'équation ci-dessus; la somme des produits deux à deux des trois racines étant -1, la troisième est égale à $-\left(\frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right)$, et la formule (2) peut se mettre sous la forme

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} dt &= \frac{n}{\sqrt{2}} \\ &\times \frac{\sin\psi\, d\psi}{\sqrt{-(\cos\psi - \cos\alpha)(\cos\psi - \cos\beta)\left(\cos\psi + \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right)}}. \end{aligned} \right.$$

Enfin en remplaçant successivement dans l'équation (3), ψ par α et β, et en éliminant A entre les deux équations résultantes, on trouve

$$B = \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha + \cos\beta}}$$

et la formule (1) devient

$$(5) \qquad d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{n} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha + \cos\beta}} \cdot \frac{dt}{\sin^2\psi}.$$

Si l'on pose

$$\cos\psi = \cos\alpha \sin^2\sigma + \cos\beta \cos^2\sigma,$$

les maxima de ψ correspondront aux multiples pairs de $\frac{\pi}{2}$, pour la valeur de l'angle auxiliaire σ, et les maxima aux multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$.

D'autre part

$$d\cos\psi = -\sin\psi d\psi = 2\sin\sigma\cos\sigma(\cos\alpha - \cos\beta)d\sigma,$$

d'où

$$(6)\ dt = \frac{2n\sqrt{\cos\alpha + \cos\beta}\, d\sigma}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 4\cos\alpha\cos\beta + 2 + \cos 2\sigma(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)}}.$$

Pour trouver la durée T relative au passage du pendule d'une position correspondant au maximum de ψ à la position suivante pour laquelle ψ est un minimum, il faut intégrer cette équation entre les limites $\sigma = 0$, $\sigma = \frac{\pi}{2}$. Or si l'on néglige les puissances de α et β supérieures à la troisième, le développement du radical du dénominateur, mis sous la forme d'une puissance négative, devra s'arrêter au second terme qui renferme $\cos 2\sigma$ à la première puissance, et comme ce terme disparaît par l'intégration, il vient tout

simplement

$$T = \frac{\pi}{2} \cdot 2n\sqrt{\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 4\cos\alpha\cos\beta + 2}},$$

ou, en supposant $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$, $\cos\beta = 1 - \frac{\beta^2}{2}$,

$$T = \frac{\pi n}{2}\left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{16}\right) = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{16}\right).$$

Pour calculer φ, nous remarquerons que la formule (5), eu égard à la valeur (6) de dt, peut se mettre sous la forme

$$d\varphi = \frac{\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 4\cos\alpha\cos\beta + 2 + \cos 2\sigma\,(\cos^2\beta - \cos^2\alpha)}}$$
$$\times\left(\frac{d\sigma}{1 + \cos\psi} + \frac{d\sigma}{1 - \cos\psi}\right).$$

On a ainsi à calculer la valeur de deux intégrales, entre les limites $\sigma = 0$, et $\sigma = \frac{\pi}{2}$, pour trouver l'angle Φ décrit par le plan vertical du pendule, en allant d'une position maximum à la position minimum suivante. La première se trouve facilement, car le coefficient en dehors de la parenthèse étant du second ordre de même que $1 - \cos\psi$, on peut supposer $\sin\alpha\sin\beta = \alpha\beta$, $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 1$, $\cos\psi = 1$, ce qui donne

$$(\alpha) \qquad \frac{\pi}{2}\frac{\alpha\beta}{4}.$$

Pour calculer la seconde, nous remarquerons que

$$2(1 - \cos\psi) = 2 - (\cos\alpha + \cos\beta) + (\cos\alpha - \cos\beta)\cos 2\sigma,$$

et qu'elle se met par suite sous la forme

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha + \cos\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}\right) - (1 - \cos\psi)}} \cdot \frac{d\sigma}{1 - \cos\psi},$$

d'où, en développant le radical renfermant ψ et négligeant les termes des ordres supérieurs au troisième,

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}\left[\frac{\left(1+\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right)^{-\frac{1}{2}}}{1-\cos\psi}\cdot d\sigma+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot d\sigma\right].$$

L'intégrale du second terme s'obtiendra en supposant $\sin\alpha\sin\beta=\alpha\beta$, $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=1$, ce qui donne

$$(\beta)\qquad \frac{\alpha\beta}{8}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Il nous reste donc l'intégrale du premier terme ou de

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\cos\beta+1}}\cdot\frac{d\sigma}{1-\cos\alpha\sin^2\sigma-\cos\beta\cos^2\sigma}$$

entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$, ce qui donne, en prenant pour variable tang σ,

$$(\gamma)\qquad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha+\cos\beta+1}}=\frac{\pi}{2}.$$

En réunissant les trois termes (α), (β), (γ), on trouve

$$\Phi=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3\alpha\beta}{8}\right),$$

ce qui montre que chaque sommet de la courbe décrite se déplace dans le sens du mouvement d'une révolution à la suivante, d'une grandeur angulaire égale à $\frac{3}{4}\pi\alpha\beta$, et l'on conçoit ainsi comment après un certain nombre de révolutions l'orientation des sommets peut être complétement changée.

Si l'on veut tenir compte de la rotation de la terre (162), on reconnaîtra facilement que la déviation des sommets de la courbe correspondant à une révolution complète est donnée approximativement par

$$2\pi\left(\frac{3}{8}\alpha\beta \pm \omega \sin\lambda \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}\right).$$

Or il ne faut pas que α et β soient bien grands pour que le premier terme entre parenthèses soit bien supérieur à $\omega \sin\lambda \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$, dont l'effet sera par conséquent insensible, lorsque l'on aura imprimé au pendule une vitesse initiale appréciable; ce qui est conforme à l'observation.

NOTE II.

MOUVEMENT D'UN POINT SUR UNE SURFACE.

Pour étudier complétement le mouvement d'un point sur une surface et déterminer les conditions qui doivent être remplies pour que ce mouvement soit possible, il est indispensable que l'on introduise dans le raisonnement l'idée de *force*.

Nous dirons donc que, lorsqu'un point matériel soumis à l'action d'une ou plusieurs forces est assujetti à se mouvoir sur une surface, cette surface, par sa rigidité, détruit l'action de toute force qui lui est normale, agissant de la concavité vers la convexité et réciproquement, selon que le mobile parcourt la concavité ou la convexité de la surface.

La rigidité de la surface produit donc sur le mobile le même effet qu'une force normale N, égale et contraire à la résultante ou à la somme algébrique *des pressions*, à laquelle on donne le nom de *réaction de la surface*, et dont la valeur ne peut s'obtenir que lorsque la nature du mouvement est complétement connue.

Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation de la surface rapportée à trois axes rectangulaires; le mouvement du point sera complétement déterminé, si l'on parvient à établir deux relations entre le temps et les coordonnées de ce point, indépendantes de la

réaction de la surface, et il suffit qu'une seule de ces relations soit fonction du temps.

En désignant par X, Y, Z les projections de la résultante F des forces qui sollicitent le mobile, sur les trois axes coordonnés, par m et v la masse et la vitesse du mobile, le principe des forces vives donne (note du n° 62, p. 67)

$$\frac{mv^2}{2} = \int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

et dans le cas où le second membre de cette équation sera une intégrale exacte, on pourra exprimer v ou $\frac{ds}{dt}$ en fonction de x, y, z.

Soient

ρ le rayon de courbure de la trajectoire;
θ l'angle formé par le plan osculateur à la courbe et le plan tangent à la surface;
Γ le rayon de courbure de la section normale à la surface menée suivant la direction de v;
F_t, F_n, les composantes de F suivant le plan tangent et la normale;
φ l'angle formé par F_t avec v.

On a, d'après le théorème de Meusnier,

$$\rho = \Gamma \sin\theta.$$

La force centripète $\frac{mv^2}{\rho}$ donne les composantes

$$\frac{mv^2}{\rho}\sin\theta = \frac{mv^2}{\Gamma}, \quad \frac{mv^2}{\rho}\cos\theta = \frac{mv^2}{\Gamma}\cot\theta,$$

suivant la normale à la surface et la perpendiculaire à v comprise dans le plan tangent; et comme N doit faire équi-

libre à F et à la force d'inertie, on a les deux relations

$$\pm N = \frac{mv^2}{\Gamma} + F_n$$

$$(3) \qquad \frac{mv^2}{\Gamma \tang \theta} = F_t \sin \varphi.$$

Dans la première, on prendra pour N le signe + ou le signe —, selon que le mobile se trouvera sur la concavité ou la convexité de la surface, et de plus on considérera F_n comme positif ou négatif, selon que cette composante sera de même sens que la composante $\frac{mv^2}{\Gamma}$ de la force centrifuge ou de sens contraire.

Le mouvement sur la surface ne sera possible qu'autant que l'on obtiendra pour N une valeur positive, ce qui aura toujours lieu dans le cas où, le mobile étant assujetti à se mouvoir sur la concavité de la courbe, F_n tendra à l'éloigner du centre de courbure correspondant à Γ.

Si, dans les mêmes circonstances, F_n vient à changer de sens, le mouvement continuera à avoir lieu sur la surface, pourvu que cette composante soit inférieure à celle $\frac{mv^2}{\Gamma}$ de la force centrifuge; mais à partir du moment où la première viendrait à surpasser la seconde, ce mobile s'éloignerait ou se détacherait de la surface, pour se mouvoir librement sous l'action de la force F, avec la vitesse qu'il possédait en quittant la surface.

Le mouvement sur la convexité de la surface ne sera possible qu'autant que la composante F_n sera négative ou qu'elle tendra à rapprocher le mobile du centre de courbure, et que son intensité sera supérieure à celle de la force $\frac{mv^2}{\Gamma}$; et si, ces deux forces devenant égales, la seconde surpasse la première à l'instant suivant, le mobile quittera la surface et se mouvra librement, comme on l'a dit plus haut.

Nous ferons remarquer, d'après la valeur ci-dessus de N, que la pression sur la surface est indépendante de l'inclinaison du plan osculateur de la trajectoire sur le plan tangent et ne varie qu'en raison de la direction de la vitesse v.

L'équation (3) est susceptible d'une interprétation géométrique assez simple; en effet, $\Gamma \tang \theta$ est la distance du mobile au point où l'axe du cercle osculateur rencontre le plan tangent ; on peut donc dire que :

La troisième proportionnelle entre la distance du mobile au point où l'axe du cercle osculateur de la trajectoire perce le plan tangent et la vitesse, est égale à la composante suivant cette distance de l'accélération de la résultante des forces qui sollicitent le mobile.

Cette même équation (3) ou la suivante

$$(4) \qquad \frac{mv^2}{\rho}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{\Gamma^2}} = F_t \sin\varphi,$$

transformée en conséquence, donnera la relation entre x, y, z qu'il s'agit d'obtenir. En effet, en considérant la vitesse comme déterminée en direction par les cosinus $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ des angles qu'elle forme avec les trois axes coordonnés, on trouvera sans peine $F_t \sin\varphi$ en fonction de ces cosinus et de X, Y, Z, et Γ en fonction de ces mêmes cosinus et de x, y, z; d'ailleurs ρ s'exprime, comme on le sait, en fonction des dérivées premières et secondes des coordonnées, de sorte que le tout se réduit à des substitutions.

Dans le cas où $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est une différentielle exacte, v pouvant s'exprimer indépendamment du temps, l'équation (4) se transformera en une équation différentielle du second ordre en x, y, z, ou tout simplement entre x et y, en éliminant z à l'aide de l'équation de la surface. L'intégrale de cette équation, jointe à l'équation (1), déterminera

complétement la forme de la trajectoire. Enfin l'équation des forces vives permettra de calculer les coordonnées x, y, z en fonction du temps.

On remarquera que lorsque le mobile n'est sollicité par aucune force extérieure, le mouvement est uniforme et le plan osculateur de la trajectoire passe par la normale à la surface. Cette propriété caractérise les lignes géodésiques de la surface.

NOTE III.

DU MOUVEMENT DU PENDULE, EN TENANT COMPTE DE LA ROTATION DE LA TERRE ET DE LA RÉSISTANCE DE L'AIR.

Comme il s'agit ici de vitesses très-faibles, on peut admettre que la résistance de l'air est proportionnelle à la simple vitesse v, et que l'accélération correspondante est représentée par $\delta.v$, δ étant une constante supposée donnée et assez petite pour que l'on puisse en négliger le carré ou le produit par ω.

Nous prendrons les équations du mouvement qui se rapportent aux axes Ox, Oy, dont la direction est définie au n° 164, et passant par la projection horizontale O du point de suspension, en raison de ce que ce sont celles qui se prêtent le plus facilement à l'intégration.

La pesanteur donne la composante $\frac{g\rho}{l}$ suivant ρ, ou les suivantes $-\frac{g}{l}x$, $-\frac{g}{l}y$ suivant Ox, Oy.

L'accélération centrifuge composée, due à la rotation $\omega \sin\gamma$ autour de Oz, donne les composantes

$$2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}, \quad -2\omega \sin\lambda \frac{dx}{dt}$$

suivant Ox, Oy; la rotation $\omega \cos\lambda$ autour de la méridienne ne détermine qu'une accélération centrifuge composée qui est négligeable. Les composantes de la résistance de l'axe étant $\delta\frac{dx}{dt}$, $\delta\frac{dy}{dt}$ suivant Ox, Oy, il vient, en posant $\frac{g}{l} = \gamma^2$,

$\omega \sin\lambda = n$,

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \gamma^2 x - 2n\dfrac{dy}{dt} + \delta\dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \gamma^2 y + 2n\dfrac{dx}{dt} + \delta\dfrac{dy}{dt} = 0. \end{cases}$$

Ces équations seront satisfaites en posant

$$x = Ae^{ht}\cos(kt + \varepsilon),$$
$$y = Ae^{ht}\sin(kt + \varepsilon),$$

A et ε étant deux constantes arbitraires, et h et k deux inconnues déterminées par les équations

$$h^2 - k^2 + \gamma^2 - 2nk + \delta h = 0,$$
$$2hk + 2nh + k\delta = 0.$$

Si δ était nul, h le serait aussi ; par conséquent, ces deux quantités sont du même ordre de grandeur, et l'on peut sans inconvénient négliger le produit nh. On tire ainsi de la seconde équation

$$h = -\frac{\delta}{2};$$

et la première donne, en continuant la même approximation,

$$k^2 - nk - \gamma^2 = 0,$$

d'où

$$k = n \pm \sqrt{\gamma^2 + n^2},$$

et enfin, en négligeant n^2 devant α^2,

$$k = n \pm \gamma.$$

Les intégrales générales des équations (1) seront par consé-

quent

$$x = e^{-\frac{\delta t}{2}} \left\{ A \cos[(n+\gamma)t+\varepsilon] + A' \cos[(n-\gamma)t+\varepsilon'] \right\},$$

$$y = e^{-\frac{\delta t}{2}} \left\{ A \sin[(n+\gamma)t+\varepsilon] + A' \sin[(n-\gamma)t+\varepsilon'] \right\},$$

A' et ε' étant deux autres constantes arbitraires.

Si l'on pose

$$x' = e^{\frac{\delta}{2}t} x, \quad y' = e^{\frac{\delta}{2}t} y,$$

x' et y' ne seront autre chose que les coordonnées de la courbe que décrirait le mobile si la résistance de l'air n'existait pas, c'est-à-dire l'ellipse tournante de M. Binet; et l'on voit encore que pour avoir la courbe réelle il faut supposer que les coordonnées décroissent en progression géométrique, d'autant plus rapidement que δ est plus grand, lorsque le temps croît en progression arithmétique.

Quant à la durée d'une révolution, qui dépend de l'angle θ donné par la relation $\tang\theta = \frac{y}{x}$, elle est indépendante de l'exponentielle, et par suite elle est la même que si la résistance de l'air n'existait pas.

NOTE IV.

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE.

1. *Équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.* — Nous supposerons que dans le n° 130 Ox, Oy, Oz sont les trois axes principaux d'inertie passant par le point fixe O.

Soient M la masse du corps;

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2),$$
$$B = \Sigma m(x^2 + z^2),$$
$$C = \Sigma m(x^2 + y^2),$$

ses moments d'inertie par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, m étant la masse du point matériel correspondant aux coordonnées x, y, z; on devra se rappeler que

$$\Sigma mxy = 0, \quad \Sigma mzy = 0, \quad \Sigma mzx = 0.$$

La somme des moments des forces d'inertie prises en sens contraire par rapport à Ox a pour expression (130)

$$\begin{aligned}
&\Sigma m(\Phi_z . y - \Phi_y . z) \\
&= \Sigma m \left\{ \left[y\frac{dn}{dt} - x\frac{dp}{dt} - (n^2 + p^2)z + nqx + pqy \right] y \right. \\
&\quad \left. - \left[x\frac{dq}{dt} - z\frac{dn}{dt} - (n^2 + q^2)y + npx + pqz \right] z \right\},
\end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$A\frac{dn}{dt}+pq\Sigma m(y^2-z^2)=A\frac{dn}{dt}+(C-B)pq.$$

Si donc nous appelons N, P, Q les moments des forces qui sollicitent le corps, par rapport à Ox, Oy, Oz, on a

$$(1)\quad\left\{\begin{array}{l} A\dfrac{dn}{dt}+(C-B)pq=N, \\ \text{et de même} \\ B\dfrac{dp}{dt}+(A-C)nq=P, \\ C\dfrac{dq}{dt}+(B-A)np=Q; \end{array}\right.$$

telles sont les équations, dues à Euler, du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Supposant que, N, P, Q étant donnés, on ait obtenu, à l'aide de ces équations, n, p, q en fonction de t, on substituera ces valeurs dans les formules (3) du n° 93, à l'aide desquelles on déterminera φ, ψ, θ, en fonction du temps, ce qui permettra de connaître la position du corps à un instant quelconque.

Remarque. — Si $B=A$, $Q=0$, q reste constant, et l'on a ce théorème : *Si les forces qui sollicitent un solide de révolution se réduisent à une force ou à un couple situés dans un plan passant par l'axe de révolution du corps, la composante de la rotation instantanée suivant cet axe reste constante pendant toute la durée du mouvement.*

La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe Ox a pour expression (92)

$$\Sigma m[(ny-px)y-(qx-nz)z]=An,$$

et l'on a de même Bp, Cq pour les quantités semblables relatives aux axes Oy et Oz.

La somme des moments des quantités de mouvement par rapport à une droite fixe dans l'espace, faisant avec Ox, Oy, Oz les angles a, b, c, sera

$$An\cos a + Bp\cos b + Cq\cos c,$$

et l'on aura, en vertu du principe des quantités de mouvement et des impulsions des forces,

$$An\cos a + Bp\cos b + Cq\cos c - An_0\cos a_0 - Bp_0\cos b_0 - Cq_0\cos c_0$$
$$= \int_0^t (N\cos a + P\cos b + Q\cos c)\,dt,$$

n_0, p_0, q_0, a_0, b_0, c_0 étant les valeurs initiales de n, p, q, a, b, c.

Si donc la droite qui représente le moment total des forces, est constamment perpendiculaire à une droite fixe dans l'espace, on a pour cette droite la relation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &An\cos a + Bp\cos b + Cq\cos c = An_0\cos a_0 + Bp_0\cos b_0 \\ &\qquad + Cq_0\cos c_0 = \text{constante},\end{aligned}\right.$$

que l'on substituera dès lors avec avantage à l'une des équations (1).

Dans les cas où le solide n'est sollicité par aucune force, le moment total des quantités de mouvement est constant et, en appelant k sa valeur, il vient

$$(3)\qquad A^2n^2 + B^2p^2 + C^2q^2 = k^2.$$

La force vive du corps autour du point fixe est

$$\Sigma m[(pz - qy)^2 + (qx - nz)^2 + (ny - px)^2] = An^2 + Bp^2 + Cq^2,$$

et en appelant $\mathfrak{T}$ le travail total des forces et h^2 la force vive initiale, on a l'équation

$$(4)\qquad An^2 + Bp^2 + Cq^2 - h^2 = 2\mathfrak{T},$$

que l'on substituera à l'une des équations (1) lorsqu'on pourra obtenir l'intégrale représentée par $\mathfrak{S}$.

Dans le cas où le corps n'est sollicité par aucune force, l'équation (4) devient

$$(5) \qquad A n^2 + B p^2 + C q^2 = h^2.$$

Ces formules conduisent facilement aux belles propriétés découvertes par M. Poinsot, relativement au mouvement d'un corps autour d'un point fixe, lorsque les forces qui le sollicitent s'y font équilibre. Nous laisserons de côté cette question, pour laquelle nous renverrons au Mémoire même de ce savant; mais nous traiterons comme applications les autres problèmes connus sur la rotation des corps et dont nous sommes parvenu à simplifier les solutions.

Autre démonstration des équations d'Euler. — On arrive très-simplement aux équations d'Euler au moyen des considérations suivantes.

Soient OM la droite qui représente en grandeur et en direction le moment total des quantités de mouvement par rapport au point O, droite dont les projections sur les axes Ox, Oy, Oz sont respectivement An, Bp, Cq; OM′ ce que devient cette droite dans l'espace absolu au bout du temps infiniment petit dt; on sait que les trois équations des moments en dynamique expriment que le moment résultant des forces extérieures agissant sur le corps solide est représenté en grandeur et en direction par l'élément MM′ divisé par le temps dt, ou, si l'on veut, par la vitesse absolue du point M. Il nous reste donc à déterminer la projection de cette vitesse sur chacun des trois axes principaux d'inertie du corps.

Or la vitesse relative de M par rapport aux axes mobiles Ox, Oy, Oz, en projection sur le premier de ces axes est $A\frac{dn}{dt}$; la composante analogue de la vitesse d'entraînement du point M considéré comme invariablement lié au corps

est, d'après le n° 82,

$$(6) \qquad -q \times Bp + p \times Cq = pq(C - B),$$

puisque Bp et Cq sont les coordonnées du point M parallèles à Oy et Oz. D'où il suit que la projection de la vitesse absolue du point M sur Ox est $A\frac{dn}{dt} + (C - B)pq$, et en l'égalant à la projection semblable N du moment total des forces extérieures par rapport au point O, on retombe sur la première des équations (1).

2. *Remarque relative au mouvement d'un corps solide entièrement libre.* — Les différentes formules établies ci-dessus sont applicables au mouvement d'un corps solide libre autour de son centre de gravité. Mais dans certains cas on pourra, avec avantage, substituer à l'une d'entre elles l'équation des forces vives dans le mouvement réel du corps, où il faut dès lors faire entrer les quantités n, p, q. Or on sait que la force vive totale d'un corps solide se compose de la force vive dans son mouvement relatif autour de son centre de gravité, et de la force vive que posséderait ce centre si toute la masse y était concentrée (*).

Si donc on appelle V la vitesse du centre de gravité du corps, $\mathfrak{T}$ le travail total des forces qui le sollicitent, évalué dans son mouvement général, on a

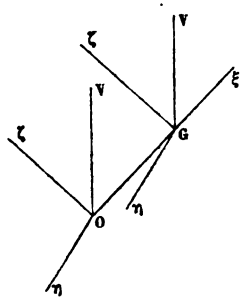
$$(7) \quad An^2 + Bp^2 + Cq^2 + MV^2 = An_0^2 + Bp_0^2 + Cq_0^2 + MV_0^2 + 2\mathfrak{T}.$$

Les formules (1) sont également applicables au mouvement d'un corps solide autour de l'un quelconque de ses points, pourvu que l'on comprenne dans les forces qui sollicitent chaque point matériel, la force d'inertie due à l'accélération du point supposé fixe et où toute la masse du corps se trouverait concentrée.

(*) *Voyez* mes *Éléments de Mécanique.*

3. *Du mouvement d'un solide pesant de révolution autour d'un point fixe situé sur son axe.* — Soient (*fig.* 73)

Fig. 73.



$O\xi$ l'axe du corps ;
O le point fixe ;
M la masse du corps ;
G son centre de gravité ;
l la longueur OG ;
OV la verticale du point O ;
α l'angle formé par OG avec OV ;
$O\zeta$ la perpendiculaire en O à OG dans le plan $VO\xi$;
$O\eta$ la perpendiculaire en O au plan $\zeta OG\xi$;
n, r, s les composantes suivant OG, $O\eta$, $O\zeta$ de la rotation instantanée ω ;
A, B, les moments d'inertie du corps par rapport aux axes principaux OG, $O\zeta$ ou $O\eta$.
α_0, r_0, s_0 les valeurs initiales de α, r, s.

D'après ce que nous avons vu plus haut, la rotation n sera constante pendant toute la durée du mouvement, puisque le moment des forces par rapport à OG est nul.

La simplicité de la solution de ce problème résulte de ce que les formules qui peuvent s'y appliquer, permettent de substituer aux axes mobiles avec le corps et perpendiculaires à Ox, les droites $O\eta$, $O\xi$.

Le principe des forces vives donne

$$(a) \qquad B(r^2 + s^2 - r_0^2 - s_0^2) = 2Mlg(\cos\alpha_0 - \cos\alpha).$$

Le moment des quantités de mouvement estimé suivant la verticale étant constant, on a

$$(b) \qquad An\cos\alpha + Bs\sin\alpha = An\cos\alpha_0 + Bs_0\sin\alpha_0.$$

Des formules (a) et (b) on déduit, pour les composantes

inconnues r, s de la rotation en fonction de α

$$(c) \qquad s = \frac{A n (\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + B s_0 \sin\alpha_0}{B \sin\alpha}.$$

$$(d) \qquad r = \pm \sqrt{\frac{2 M g l (\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + B(r_0^2 + s_0^2) - \frac{[A n (\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + B s_0 \sin\alpha_0]^2}{B \sin^2\alpha}}{B}},$$

ou

$$(d') \quad r = \pm \frac{1}{B \sin\alpha} \sqrt{(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)[2 M g l B (1 - \cos^2\alpha) - A^2 n^2 (\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + B^2 (\cos\alpha + \cos\alpha_0)(r_0^2 + s_0^2) - 2 A B n s_0 \sin\alpha_0] + B^2 r_0^2 \sin^2\alpha_0},$$

et comme on a

$$(e) \qquad r = \frac{d\alpha}{dt},$$

la détermination de t en fonction de α, ou réciproquement, se ramène à une quadrature.

Il nous reste maintenant à discuter les formules (c), (d) ou (d'), à examiner les circonstances dans lesquelles r sera positif ou négatif, et enfin à nous faire une image de la nature du mouvement.

Considérons en premier lieu le cas où r_0 n'est pas nul, et admettons, pour fixer les idées, qu'il soit positif. D'après la formule (e), α croîtra à partir de α_0, et l'on devra d'abord prendre le radical positivement. Mais α en croissant finira par atteindre une valeur α_1 qui annulera r, car pour $\alpha = 180°$ la quantité

sous le radical de la formule (d) devient $-\infty$, à moins que l'on n'ait $An\cos\alpha_0 + Bs_0\sin\alpha_0 = -An$, ce que nous ne supposerons pas actuellement. A l'instant suivant, r aura changé de signe ou sera devenu négatif, et α, allant alors en décroissant, repassera par la valeur α_0, diminuera encore jusqu'à une certaine valeur α_2 pour laquelle r sera nul, car pour $\alpha = 0$ la quantité sous le radical passe encore par l'infini négatif; r s'annulant changera de signe, α croîtra jusqu'à α_1, et ainsi de suite. L'axe OG oscillera ainsi dans le plan mobile GOV, de part et d'autre de sa position initiale, et les écarts α_1, α_2 s'obtiendront en choisissant convenablement les racines de l'équation en $\cos\alpha$ obtenue en égalant à zéro la quantité sous le radical de la formule (d').

Supposons maintenant que r_0 soit nul, on a

$$(f) \qquad r = \pm\sqrt{\frac{2Mgl(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + Bs_0^2 - \frac{[An(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + Bs_0\sin\alpha_0]^2}{B\sin^2\alpha}}{B}},$$

ou

$$(f') \quad r = \pm\frac{\sqrt{(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)[2MgBl(1-\cos^2\alpha) - A^2n^2(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + B^2(\cos\alpha + \cos\alpha_0)s_0^2 - 2ABns_0\sin\alpha_0]}}{B\sin\alpha}.$$

Pour $\alpha = \alpha_0$, le second facteur sous le radical de la formule (f') a pour valeur

$$2MgBl\sin^2\alpha_0 + 2B^2\cos\alpha_0 s_0^2 - 2ABns_0\sin\alpha_0;$$

en admettant que cette quantité soit positive, aux premiers instants, à partir de la position initiale de OG, $\cos\alpha$ devra décroître pour que r reste réel; α croissant, r sera positif et deviendra nul pour une valeur α_1 de α moindre que 180°, comme on le reconnaît à l'inspection de l'équation (f); r changera alors de signe, α décroîtra de α_1 jusqu'à α_0, et ainsi de suite.

Si

$$2MgBl\sin^2\alpha_0 + 2B^2\cos\alpha_0 s_0^2 - 2ABns_0\sin\alpha_0 = 0,$$

ou

$$(g) \qquad M\,lg \sin^2 \alpha_0 + B s_0^2 \cos \alpha_0 - A n s_0 \sin \alpha_0 = 0,$$

r sera constamment nul, et l'angle α ne variera pas. En effet, eu égard à la relation (g), la formule (f') devient

$$r = \pm \frac{\cos \alpha_0 - \cos \alpha}{B \sin \alpha} \sqrt{2 M g B l (\cos \alpha + \cos \alpha_0) - A^2 n^2 - B^2 s_0^2};$$

si α variait, la quantité sous le radical serait aux premiers instants très-peu différente de la quantité

$$4 M g B l \cos \alpha_0 - A^2 n^2 - B^2 s_0^2,$$

qui est négative, car en remplaçant dans l'inégalité

$$A^2 n^2 + B^2 s_0^2 > 4 M g B l \cos \alpha_0,$$

M par sa valeur tirée de (g), on trouve

$$(A n \sin \alpha_0 - 2 B s_0 \cos \alpha_0)^2 + B^2 s_0^2 \sin^2 \alpha_0 > 0.$$

Ainsi donc lorsque la relation (g) sera satisfaite, l'inclinaison de l'axe du corps sur la verticale restera constante ainsi que s, et par suite la rotation $\frac{s}{\sin \alpha}$ (*) du plan ζOV autour de la verticale.

Admettons maintenant que $r_0 = 0$, $s_0 = 0$, ou que le mouvement initial se réduise à une rotation du solide au-

(*) La rotation s se décompose en deux autres, l'une suivant OG, et la seconde, $\frac{s}{\sin \alpha}$, suivant OV, qui mesure la rotation du plan ζOV autour de la verticale.

tour de son axe. Les formules (f) et (f') deviennent

$$(h)\quad r = \pm\sqrt{\frac{(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)\left[2Mgl - \frac{A^2n^2}{B\sin^2\alpha}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)\right]}{B}},$$

$$(h')\quad r = \pm\frac{1}{B\sin\alpha}\sqrt{(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)\left[2MgBl(1-\cos^2\alpha) - A^2n^2(\cos\alpha_0 - \cos\alpha)\right]}.$$

L'angle α décroîtra de α_0 jusqu'à une certaine valeur donnée par

$$\frac{2MgBl}{A^2n^2}(1 - \cos^2\alpha_1) - (\cos\alpha_0 - \cos\alpha_1) = 0,$$

reviendra ensuite à α_0, et ainsi de suite.

Si la rotation n est assez grande pour que $\frac{2MgBl}{A^2n^2}$ soit très-petit par rapport à l'unité, $\cos\alpha_1$ différera très-peu de $\cos\alpha_0$, ou autrement, l'axe du corps s'écartera fort peu dans le plan ζOV de sa position initiale. Posant donc

$$\alpha = \alpha_0 + \delta,$$

δ étant du même ordre de grandeur que $\frac{2MgBl}{A^2n^2}$ dont nous négligerons le carré, il vient

$$\cos\alpha_0 - \cos\alpha = \delta\sin\alpha_0,$$

et par suite

$$r = \frac{d\delta}{dt} = \pm\frac{Mgl\sin\alpha_0}{An}\sqrt{1 - \left(1 - \frac{A^2n^2}{MglB\sin\alpha_0}\delta\right)^2}.$$

On aura pour l'écart maximum

$$\delta_1 = 2\frac{MglB}{A^2n^2}\sin\alpha_0,$$

pour le temps écoulé correspondant à l'angle $\alpha_0 + \delta$,

$$t = \frac{An}{Mgl\sin\alpha_0}\int_0^{\delta}\frac{d\delta}{\pm\sqrt{1-\left(1-\frac{A^2n^2\delta}{Mgl\,B\sin\alpha_0}\right)^2}}$$

$$= \frac{B}{An}\arccos\left(1-\frac{A^2n^2\delta}{Mgl\,B\sin\alpha_0}\right),$$

d'où

$$\delta = \frac{MglB\sin\alpha_0}{A^2n^2}\left(1-\cos\frac{Ant}{B}\right) = \frac{2MgBl\sin\alpha_0}{A^2n^2}\sin^2\frac{1}{2}\frac{Ant}{B}$$

et

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{2Mgl\,B\sin\alpha_0}{A^2n^2}\cdot\sin^2\frac{1}{2}\frac{Ant}{B}.$$

En supposant $\delta = \frac{1}{2}\delta_1$ dans l'expression du temps, on obtient, pour la durée d'une demi-oscillation de l'axe OG,

$$T = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{B}{An},$$

et la rotation $\frac{s}{\sin\alpha}$ du plan ζOV autour de la verticale est exprimée par

$$\frac{s}{\sin\alpha} = \frac{An}{B\sin\alpha_0}\delta.$$

Cette rotation est nulle pour $\delta = 0$, maximum pour $\delta = \delta_1$, et sa valeur moyenne est

$$\Omega = \frac{An}{B\sin\alpha_0}\cdot\frac{1}{\delta_1}\int_0^{\delta_1}\delta\,d\delta = \frac{Mgl}{An}.$$

Elle est positive ou négative, ou *directe* ou *rétrograde* relativement à la rotation n, selon que δ ou l est positif ou négatif, ou que le centre de gravité du corps se trouve au-dessus ou au-dessous du point fixe.

Soit θ l'angle décrit au bout du temps t par le plan ζOV autour de la verticale ; on a

$$\theta = \frac{An}{B\sin\alpha_0}\int_0^t\delta\,dt = \frac{Mgl}{An}\left(t-\frac{B}{An}\sin\frac{Ant}{B}\right).$$

Pour la durée $t' = \pi \cdot \frac{B}{An}$ d'une oscillation complète de l'axe, θ a pour valeur

$$\theta' = \pi \cdot \frac{Mgl\,B}{A^2 n^2};$$

enfin la durée d'une oscillation complète de l'axe OG autour de la verticale est exprimée par

$$\tau = \frac{2\pi}{\theta'} t' = 2\pi \cdot \frac{An}{Mgl}.$$

Ces divers résultats sont d'accord avec une expérience de M. Foucault. L'appareil dont s'est servi ce physicien se compose d'un tore maintenu dans une chappe d'une masse beaucoup plus petite, et auquel on imprime un mouvement de rotation extrêmement rapide (3000 à 4000 tours par minute). Une tige fixée à la chappe dans le prolongement de l'axe de rotation est terminée par un crochet qui se loge dans une crapaudine ou godet. L'instrument étant abandonné à lui-même, l'axe paraît décrire aux yeux de l'observateur un cône circulaire droit d'une ouverture constante autour de la verticale du point fixe, avec une vitesse angulaire d'autant plus petite, que n est plus grand. En réalité le cône n'est pas circulaire; mais les petites trépidations de l'axe dans le plan ζOV sont insensibles et ne frappent pas l'œil de l'observateur. La rotation de ce plan variant périodiquement, mais dans des périodes très-courtes, l'œil ne perçoit que sa valeur moyenne, qui, toutes choses égales d'ailleurs, varie en raison inverse de la rotation du tore autour de son axe. Les quantités Ω et θ étant indépendantes de α_0, le phénomène doit se produire dans les mêmes conditions, lorsque l'on vient à écarter ou rapprocher, pendant le mouvement, OG de la verticale, ce qui est conforme à l'observation.

Revenons aux formules (d) et (d') et supposons que les circonstances initiales du mouvement soient telles, que

$$An \cos\alpha_0 + Bs_0 \sin\alpha_0 = An,$$

d'où

$$s_0 = \frac{An}{B} \operatorname{tang} \frac{\alpha_0}{2},$$

on a

$$s = \frac{An}{B} \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$$

et

$$r = \pm \sqrt{\frac{2Mgl(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + Br_0^2 - \frac{A^2n^2}{B}\left(\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tang}^2\frac{\alpha_0}{2}\right)}{B}}.$$

Si r_0 est différent de zéro, et positif par exemple, il faut prendre d'abord le signe $+$; α croît jusqu'à une certaine limite α_1 inférieure à 180°, car pour $\alpha = 180°$ la quantité sous le radical passe par l'infini négatif; r change alors de signe, α diminue, repasse par α_0, et peut même devenir négatif, car

$$2Mgl(\cos\alpha_0 - 1) + Br_0^2 + \frac{A^2n^2}{B} \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha_0}{2}$$

peut être positif; ainsi α atteindra une valeur α_2 supérieure à $-\pi$, r changera de signe, α croîtra jusqu'à α_1, et ainsi de suite.

Lorsque r_0 sera nul, on aura

$$r = \pm \sqrt{\frac{4Mgl \sin\left(\frac{\alpha+\alpha_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\right) - \frac{A^2n^2}{B}\left(\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tang}^2\frac{\alpha_0}{2}\right)}{B}},$$

ou

$$r = \pm \sqrt{\frac{\left(4Mgl - \frac{A^2n^2}{B\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha_0}{2}}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\alpha_0}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{2}\right)}{B}}.$$

Si $4Mgl < \frac{A^2 n^2}{B\cos^4 \frac{\alpha_0}{2}}$, α décroîtra à partir de α_0, et r sera négatif et s'annulera pour une valeur α_1 de α donnée par

$$\frac{\cos^2 \frac{\alpha_1}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha_0}{2}} = \frac{A^2 n^2}{4Mgl B\cos^4 \frac{\alpha_0}{2}},$$

pourvu que $\frac{A^2 n^2}{4Mgl B\cos^2 \frac{\alpha_0}{2}}$ soit inférieur à l'unité; dans ce cas, comme le second membre de cette équation est supérieur à l'unité, on devra prendre pour α_1 le plus petit arc positif qui y satisfait; mais lorsque $\frac{A^2 n^2}{4Mgl B\cos^2 \frac{\alpha_0}{2}}$ sera plus grand que l'unité, α décroîtra jusqu'à $\alpha = -\pi + \alpha_0$, et l'axe de rotation oscillera en passant par la verticale et en décrivant dans chaque oscillation un angle de 180°.

On arrive à des résultats analogues lorsque l'on suppose $4Mgl > \frac{A^2 n^2}{B\cos^4 \frac{\alpha_0}{2}}$.

4. *Des efforts qu'il faut développer pour obliger l'axe du corps à décrire une surface conique donnée.*

Lorsque l'on tient les mains placées respectivement suivant les deux prolongements de l'axe de l'appareil décrit plus haut de M. Foucault, et que l'on cherche à déplacer brusquement l'un de ces prolongements, tandis que l'autre est maintenu fixe, on éprouve des efforts de traction ou de compression, selon le sens du déplacement, d'autant plus considérables que ce déplacement est lui-même plus rapide.

Pour déterminer l'intensité de ces efforts, on voit facile-

ment qu'il suffit de calculer la force capable d'un mouvement conique donné autour du point fixe, du corps de révolution, dans l'hypothèse de $s_0 = 0$, $r_0 = 0$, force qui sera égale et contraire à l'effort exercé sur la main supposée appliquée au même point.

Soient η, ζ les composantes parallèles à $O\eta$, $O\zeta$ de la force agissant en un point de l'axe, distant du point fixe d'une longueur λ; r et s sont supposés donnés, et n continue à rester constant. Le principe des forces vives donne

$$B(rdr + sds) = Mglr\sin\alpha dt + s\lambda.\eta dt - r\zeta\lambda\, dt$$

ou

$$(\alpha) \qquad B\left(r\frac{dr}{dt} + s\frac{ds}{dt}\right) = Mglr\sin\alpha + s\eta\lambda - r\zeta\lambda,$$

et celui de la projection des quantités de mouvement, appliqué à la verticale,

$$\frac{dAn\cos\alpha}{dt} + \frac{d.Bs\sin\alpha}{dt} = \eta\lambda\sin\alpha,$$

d'où, en se rappelant que $r = \frac{d\alpha}{dt}$,

$$\eta\lambda = -Anr + Brs\cot\alpha + B\frac{ds}{dt}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (α), on trouve

$$\zeta\lambda = Mgl\sin\alpha - Ans + Bs^2\cot\alpha - Br\frac{dr}{dt}.$$

Si le tore ne tournait pas autour de son axe, il faudrait supposer $n = 0$; de sorte que l'excédant d'effort nécessité par l'inertie du tore en mouvement a pour moments composants

$$\eta\lambda = -Anr,$$

$$\zeta\lambda = -Ans,$$

d'où

$$\frac{\eta\lambda}{\zeta\lambda} = \frac{r}{s};$$

et en appelant A le moment total, on a

$$A = A n \sqrt{r^2 + s^2}.$$

On déduit de là que : 1° *le moment de l'effort supporté par chaque main par rapport au point de l'axe saisi par l'autre est égal au produit du moment des quantités de mouvement par rapport à l'axe du corps, par la rotation imprimée à cet axe ;* 2° *la direction de cet effort est perpendiculaire à l'axe de révolution et à l'élément de chemin parcouru par son point d'application, ce qui est d'accord avec l'expérience.*

Supposons, par exemple, que le solide de révolution soit un anneau en fer dont le cercle générateur ait $0^m,01$ de diamètre, le lieu des centres de ce cercle ayant lui-même un diamètre de $0^m,12$. Le poids du tore est sensiblement égal à $0^k,307$, et l'on a avec une semblable approximation $A = 0,0001$. Admettons que le tore fasse 3000 tours par minute, ou que

$$n = \frac{3000 . 2\pi}{60} = 314,15,$$

et que la vitesse imprimée à l'une des extrémités de l'axe soit $0^m,60$, à une distance de $0,10$ de l'extrémité maintenue fixe : on a pour la rotation imprimée à l'axe du solide $\frac{0,60}{0,10} = 6$, par suite

$$A = 0,203.$$

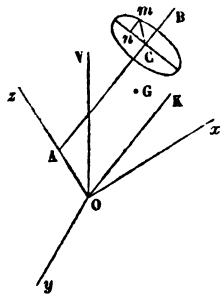
Enfin, l'effort éprouvé par chaque main est équivalent à

$$\frac{A}{0,10} = 2^k,03.$$

5. J'ai vu dans le cabinet de M. Maurel, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, un appareil qui diffère de celui de M. Foucault en ce que, 1° la chappe, dont la forme est rectangulaire, a une masse au moins comparable à celle du volant; 2° l'une des extrémités du côté de la chappe parallèle à l'arbre du volant est articulée à l'aide d'une goupille horizontale à une fourchette dont la douille s'emboîte sur un tourillon fixe vertical. On voit ainsi que le plan moyen vertical de la chappe a la faculté de tourner autour de la verticale, tandis que tous les points de la chappe peuvent en outre se mouvoir autour de la goupille, parallèlement à ce plan. Il m'a paru intéressant d'étudier les lois du mouvement de l'appareil de M. Maurel en raison même de la complication que paraît présenter un pareil problème.

Soient (*fig.* 74):

Fig. 74.



OV l'axe vertical du tourillon;

O le point où il est rencontré par la goupille d'articulation;

Ox, Oy, Oz les axes principaux d'inertie relatifs au point O, du système de la chappe et du volant : deux d'entre eux, le premier et le dernier par exemple, sont situés dans le plan moyen vertical de l'appareil;

A, B, C les moments d'inertie de l'appareil correspondant aux axes ci-dessus;

AB l'axe de rotation du volant;

I le moment d'inertie du volant par rapport à AB;

OK la parallèle à AB menée par le point O;

ε l'angle formé par OK avec Ox;

φ l'angle VOx;

n, p, q les composantes de la rotation instantanée de la chappe suivant Ox, Oy, Oz;

γ la rotation du plan zOx autour de OV;

ω la rotation initiale du tore autour de AB.

On a

$$(1) \qquad \begin{cases} n = \gamma \cos\varphi, \\ q = \gamma \sin\varphi. \end{cases}$$

Si l'on néglige le frottement, les réactions des coussinets du volant rencontrent son axe, et celles des épaulements sont parallèles à cet axe; d'où il résulte que dans le mouvement absolu du volant sa rotation suivant AB reste constante et est égale à ω.

Nous continuerons à considérer comme positives les rotations n, p, q, γ lorsqu'elles auront lieu de la gauche vers la droite pour l'observateur couché successivement suivant Ox, Oy, Oz, OV en ayant les pieds en O, et comme négatives dans le cas contraire.

Pour fixer les idées, nous supposerons que la rotation ω a lieu de la gauche vers la droite pour l'observateur couché suivant AB, en ayant les pieds en A sur Oz.

La rotation relative du tore autour de AB par rapport à la chappe étant $\omega - n\cos\varepsilon - q\sin\varepsilon$, les quantités de mouvement auxquelles elle donne lieu forment un couple perpendiculaire à OK dont le moment est exprimé par

$$I(\omega - n\cos\varepsilon - q\sin\varepsilon) = I[\omega - \gamma\cos(\varphi - \varepsilon)],$$

et ce moment estimé suivant OV a pour valeur

$$I[\omega - \gamma\cos(\varphi - \varepsilon)]\cos(\varphi - \varepsilon).$$

Le moment total des quantités de mouvement de la chappe et du volant estimé suivant OV est égal à la somme des moments estimés de la même manière du volant dans son mouvement relatif, et du système total dans son mouvement commun. Or, dans ce dernier mouvement, les composantes suivant Ox, Oz du moment des quantités de mouvement sont

$$An = A\gamma\cos\varphi, \quad Cq = C\gamma\sin\varphi,$$

dont la somme des projections sur OV est

$$\gamma(A\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi).$$

Il vient donc, en appelant φ_0 la valeur initiale de φ, et remarquant que, à l'instant initial, γ est nul,

$$(A\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi)\gamma + I[\omega - \gamma\cos(\varphi - \varepsilon)]\cos(\varphi - \varepsilon) - I\omega\cos(\varphi_0 - \varepsilon) = 0,$$

d'où

$$(2) \qquad \gamma = \frac{I\omega[\cos(\varphi_0 - \varepsilon) - \cos(\varphi - \varepsilon)]}{A\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi - I\cos^2(\varphi - \varepsilon)}.$$

Les composantes de la vitesse d'un point de la chappe ayant x, y, z pour coordonnées sont

$$pz - qy = pz - \gamma y\sin\varphi \ldots\ldots\ldots \quad \text{suivant } Ox,$$
$$qx - nz = \gamma(x\sin\varphi - z\cos\varphi) \ldots \quad \text{suivant } Oy,$$
$$ny - px = \gamma y\cos\varphi - px \ldots\ldots\ldots \quad \text{suivant } Oz;$$

la force vive de la chappe est par suite

$$(a) \quad \sum m[(pz - \gamma y\sin\varphi)^2 + \gamma^2(x\sin\varphi - z\cos\varphi)^2 + (\gamma y\cos\varphi - px)^2],$$

le signe $\sum$ se rapportant à la somme des molécules de la chappe.

Soient m (*fig.* 74, p. 360) la masse d'une molécule du solide de révolution; C le centre de la circonférence qu'elle décrit; n sa projection sur le plan zOx; x', y', z' les coordonnées du point m; u la longueur Cn. La vitesse relative $[\omega - \gamma\cos(\varphi - \varepsilon)]Cm$ de m a respectivement pour composantes parallèles à Oy et Cn

$$-[\omega - \gamma\cos(\varphi - \varepsilon)]u \ldots \quad \text{suivant } Oy,$$
$$[\omega - \gamma\cos(\varphi - \varepsilon)]y' \ldots \quad \text{suivant } Cn.$$

Cette dernière donne elle-même les composantes

$$-[\omega-\gamma\cos(\varphi-\varepsilon)]y'\sin\varepsilon\ldots\quad\text{suivant } Ox,$$
$$[\omega-\gamma\cos(\varphi-\varepsilon)]y'\cos\varepsilon\ldots\quad\text{suivant } Oz.$$

Les composantes de la vitesse absolue du point m respectivement parallèles aux axes Ox, Oy, Oz ont par suite pour valeurs

$$pz'-\gamma y'\sin\varphi-[\omega-\gamma\cos(\varphi-\varepsilon)]y'\sin\varepsilon,$$
$$\gamma(x'\sin\varphi-z'\cos\varphi)-[\omega-\gamma\cos(\varphi-\varepsilon)]u,$$
$$\gamma y'\cos\varphi-px'+[\omega-\gamma\cos(\varphi-\varepsilon)]y'\cos\varepsilon.$$

Enfin, en affectant le signe Σ à l'ensemble des molécules du solide de révolution, la force vive de ce solide a pour expression

$$\Sigma m\left\{\begin{array}{l}\{pz'-\gamma y'\sin\varphi-[\omega-\gamma\cos(\varphi-\varepsilon)]y'\sin\varepsilon\}^2\\ +\{\gamma(x'\sin\varphi-z'\cos\varphi)-[\omega-\gamma\cos(\varphi-\varepsilon)]u\}^2\\ +\{\gamma y'\cos\varphi-px'+[\omega-\gamma\cos(\varphi-\varepsilon)]y'\cos\varepsilon\}^2,\end{array}\right.$$

ou

$$(b)\left\{\begin{array}{l}\Sigma m[(pz'-\gamma y'\sin\varphi)^2+\gamma^2(x'\sin\varphi-z'\cos\varphi)^2\\ +(\gamma y'\cos\varphi-px')^2]\\ +2[\omega-\gamma\cos(\varphi-\varepsilon)]\left\{\begin{array}{l}-\sin\varepsilon\,\Sigma m(pz'-\gamma y'\sin\varphi)y'\\ -\gamma\,\Sigma m(x'\sin\varphi-z'\cos\varphi)u\\ +\cos\varepsilon\,\Sigma m(\gamma y'\cos\varphi-px')y'\end{array}\right\}\\ +[\omega-\gamma\cos(\varphi-\varepsilon)]^2\,\Sigma m(y'^2+u^2).\end{array}\right.$$

La force vive totale s'obtiendra en ajoutant les expressions (a) et (b). Or l'expression (a) ajoutée à

$$\Sigma m[(pz'-py'\sin\varphi)^2+\gamma^2(x'\sin\varphi-z'\cos\varphi)^2$$
$$+(\gamma y'\cos\varphi-px')^2]$$

est la force vive que posséderait tout le système considéré comme invariable et ne possédant que le mouvement de la chappe. Cette somme est donc égale à

$$An^2+Bp^2+Cq^2=\gamma^2(A\cos^2\varphi+C\sin^2\varphi)+Bp^2.$$

Enfin, en remarquant que

$$\Sigma m y'^2 = \Sigma m u^2 = \frac{I}{2},$$

et que, en vertu de la symétrie,

$$\Sigma m z' y' = 0, \quad \Sigma m x' y' = 0,$$

la force vive totale a pour expression

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} \gamma^2 (A \cos^2\varphi + C \sin^2\varphi) + B p^2 + I[\omega - \gamma \cos(\varphi - \varepsilon)]^2 \\ + [\omega - \gamma \cos(\varphi - \varepsilon)][I \gamma \cos(\varphi - \varepsilon) - 2\gamma \sin\varphi \Sigma m u x' \\ + 2\gamma \cos\varphi \Sigma m u z']. \end{array} \right.$$

Le tout se réduit donc à calculer

$$\Sigma m u x', \quad \Sigma m u z'.$$

Soient x'', z'' les coordonnées du point C, parallèles à Ox, Oz. On a

$$x' = x'' - u \sin\varepsilon,$$

$$z' = z'' + u \cos\varepsilon,$$

$$\Sigma m u x' = \Sigma m u x'' - \frac{I}{2} \sin\varepsilon,$$

$$\Sigma m u z' = \Sigma m u z'' + \frac{I}{2} \cos\varepsilon.$$

Or $\Sigma m u x''$, $\Sigma m u z''$ sont nulles, puisqu'elles le sont évidemment pour chacune des tranches perpendiculaires à AB dans lesquelles on peut supposer le volant décomposé. En faisant ces réductions, l'expression (c) devient

$$\gamma^2 [A \cos^2\varphi + B \sin^2\varphi - I \cos^2(\varphi - \varepsilon)] + I \omega^2 + B p^2.$$

Soient G le centre de gravité de l'appareil; l la longueur OG; δ l'angle GOx; M la masse totale. Le principe des forces vives donne

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \gamma^2 [A \cos^2\varphi + C \sin^2\varphi - I \cos^2(\varphi - \varepsilon)] + B q^2 \\ = 2 M g l [\cos(\varphi_0 - \delta) - \cos(\varphi - \delta)], \end{array} \right.$$

d'où, eu égard à la relation (2),

$$p = \pm \sqrt{\frac{2Mgl[\cos(\varphi_0 - \delta) - \cos(\varphi - \delta)] - \frac{l^2\omega^4[\cos(\varphi_0 - \delta) - \cos(\varphi - \varepsilon)]^2}{A\cos^2\varphi + C\sin^2\varphi - I\cos^2(\varphi - \varepsilon)}}{B}},$$

ou

$$(4)\quad p = \frac{2}{\sqrt{B}}\sqrt{\sin\frac{(\varphi - \varphi_0)}{2}\left\{Mgl\sin\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2} - \delta\right) - \frac{l^2\omega^4\sin^2\left[\frac{(\varphi + \varphi_0)}{2} - \varepsilon\right]\sin\frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi - I\cos^2(\varphi - \varepsilon)}\right.}.$$

Nous n'entrerons pas dans la discussion des formules (2) et (4); nous ferons seulement remarquer que si $\varphi_0 = \delta$, ou si OG coïncide à l'instant initial avec OV, pour une valeur de φ différente de δ d'une quantité infiniment petite η, la quantité sous le radical se réduit à

$$\eta^2\left[Mgl - \frac{I\omega^2\sin(\delta - \varepsilon)}{A\cos^2\delta + C\sin^2\delta - I\cos^2(\delta - \varepsilon)}\right].$$

Si donc, δ étant supérieur à ε, la vitesse de rotation ω est assez grande pour que le coefficient η^2 soit négatif, p sera imaginaire pour toute valeur de φ autre que celle de $\varphi = \delta$ pour laquelle $p = 0$. Dans ce cas la chappe tournerait uniformément autour de OV, sans se déplacer de part et d'autre de cette droite. Mais comme cette sorte d'équilibre dynamique est instable, il est impossible de le réaliser; la chappe bascule brusquement dans son plan lorsqu'on cherche à lui faire prendre cette position exceptionnelle, et lorsqu'elle a ainsi tourné d'un certain angle, le phénomène se produit comme l'indiquent les formules (2) et (4).

6. *Des rotations périmétriques de M. Sire.* — M. Sire est arrivé dernièrement à produire un phénomène singulier, dont l'explication n'est pas immédiatement évidente.

Ce physicien emploie à cet effet un solide de révolution dont un point de l'axe est rendu fixe, ce que l'on réalise en terminant ce corps par un pivot qui s'engage dans une

crapaudine. On sait (p. 354) qu'en imprimant à ce corps autour de son axe une rotation plus ou moins rapide dans un certain sens, il prend lui-même autour de la verticale du point fixe un mouvement de rotation de même sens ou de sens contraire ou, si l'on veut, *direct* ou *rétrograde,* pour l'observateur couché suivant les axes correspondants ou ayant les pieds au point fixe, selon que le centre de gravité se trouve au-dessus ou au-dessous de ce point. Ce mouvement direct ou rétrograde est d'autant plus lent que la rotation propre du corps est elle-même plus considérable.

Mais si la tige cylindrique qui forme le prolongement du mobile dans sa partie supérieure, rencontre le bord d'une plaque terminée par un contour quelconque continu ou discontinu, elle le suit immédiatement en prenant dans tous les cas un mouvement direct beaucoup plus rapide que le mouvement direct ou rétrograde autour de la verticale du point fixe qu'il possédait quelques instants auparavant. La tige exerce ainsi une pression sur le pourtour de la plaque, dont elle ne se détache qu'aux points saillants ou anguleux, pour reprendre aussitôt la portion suivante du contour.

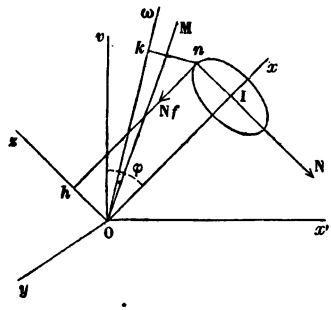
M. Sire, qui donne à ce phénomène le nom de *rotation périmétrique,* fait varier ses expériences en employant successivement un cercle, un triangle à sommets arrondis, une sorte d'ellipse allongée, figures que l'on dispose de manière que leurs centres de figure se trouvent sur la verticale du point fixe, et enfin une courbe fermée présentant une partie rentrante.

En y regardant d'un peu près, on reconnaît que le fait observé est dû au frottement de la tige du corps contre la plaque; cette résistance tend à diminuer la rotation propre du solide, mais, transportée en son centre de gravité, elle a pour objet de produire, en projection horizontale, un mouvement direct sur le corps autour du point fixe. Une figure très-simple suffit pour éclaircir cette explication sommaire.

Mais si l'on veut aller plus loin, en cherchant à déterminer la loi du mouvement, on rencontre, en général, dans l'intégration des difficultés insurmontables, et je n'ai pu arriver à une solution complète que dans le cas particulier où la plaque est terminée par un contour circulaire ayant son centre sur la verticale du point fixe.

Soient (*fig.* 75)

Fig. 75.



O le point fixe;

OV la verticale correspondante;

Ox l'axe du solide de révolution;

Oz la perpendiculaire en O à Ox dans le plan VOx;

Oy la perpendiculaire en O au plan zOx;

n, r, s les composantes de la rotation instantanée du solide, suivant Ox, Oy, Oz, considérées comme positives ou négatives, selon qu'elles ont lieu de la gauche vers la droite ou inversement, pour l'observateur couché successivement suivant ces trois directions en ayant les pieds en O;

A, B les moments d'inertie du corps, le premier correspondant à Ox, et le second à toute droite perpendiculaire à cette direction menée par le point O;

μ le poids du corps multiplié par la distance de son centre de gravité au point fixe : ce produit sera considéré comme positif ou négatif selon que le centre de gravité du corps se trouvera au-dessus ou au-dessous du point fixe;

α l'angle formé par Ox et OV.

Nous pouvons supposer, 1° que la plaque circulaire directrice est taillée sur sa tranche en forme d'un tronc de cône

dont l'angle au sommet est 2α, de manière à affecter ainsi la forme de l'enveloppe des positions de la tige du tore, 2°, et avec une approximation suffisante, que les réactions normales élémentaires de la plaque sur la tige ont, de même que les frottements, une résultante appliquée en chaque instant au point de la circonférence moyenne de la plaque en contact avec la tige.

Soit donc n le point d'application de la résultante N des réactions normales et de celle de Nf des frottements, f étant le coefficient de frottement; I le centre de la circonférence de la tige correspondant au point n, b la distance IO, a le rayon nI.

On a, en général, $r = \frac{d\alpha}{dt}$, et comme α est constant d'après l'hypothèse admise, il s'ensuit que r est constamment nul.

On a d'abord l'équation

$$(1) \qquad A\frac{dn}{dt} = -Nfa.$$

Soit Oω la droite qui représente la rotation instantanée du corps, située dans le plan VOx; nk la perpendiculaire abaissée du point n sur sa direction; $nh = b =$ OI la perpendiculaire abaissée du même point sur Oz; la vitesse du point n est $\omega . kn$ ou, d'après le théorème de Varignon, $s.nh - n.n\mathrm{I} = sb - na$. Le principe des forces vives donne donc

$$A\,n\,dn + B\,s\,ds = Nf(sb - na)\,dt,$$

ou tout simplement, en vertu de l'équation (1),

$$(2) \qquad B\frac{ds}{dt} = Nfb.$$

Si l'on élimine N entre les équations (1) et (2), on peut intégrer, et si on désigne par α une constante, il vient

$$(3) \qquad \frac{A\,n}{a} + \frac{B\,s}{b} = \beta.$$

Il nous reste maintenant à établir une nouvelle relation entre n et s.

Soit OM la droite située dans le plan zOV, qui représente le moment total des quantités de mouvement du tore, et dont An et Bs sont les projections sur Ox et Oz. La rotation s se décompose en deux autres, l'une $s \tang \alpha$ suivant Ox, et l'autre $\frac{s}{\sin \alpha}$, qui représente la rotation autour de OV du système d'axes Ox, Oy, Oz.

La vitesse relative du point M, par rapport à ces axes, estimée suivant Oy, étant nulle, la projection sur cette direction de sa vitesse absolue se réduit à celle de la vitesse d'entraînement. Soit Ox' la perpendiculaire en O à OV menée dans le plan VOx; il est facile de voir que la projection de OM sur Ox', ou la distance du point M à OV, est égale à $An \sin \alpha - Bs \cos \alpha$, et que, par suite, la vitesse d'entraînement de M estimée parallèlement à Oy a pour expression

$$\frac{s}{\sin \alpha}(An \sin \alpha - Bs \cos \alpha);$$

et comme les trois équations de la Dynamique relatives aux moments expriment que la vitesse absolue du point M représente en grandeur et en direction le moment des forces qui sollicitent le corps, il vient

$$(4) \qquad s(An - Bs \cot \alpha) = Nb + \mu \sin \alpha,$$

d'où, en éliminant Nb au moyen de l'équation (2) et An à l'aide de la relation (3), en négligeant pour simplifier $\frac{a}{b}$, qui est une très-petite fraction,

$$(5) \qquad \frac{ds}{-\mu \sin \alpha + s(a\beta - Bs \cot \alpha)} = \frac{f}{B}\, dt.$$

Or pour que la tige cylindrique s'appuie constamment sur la tranche de la plaque circulaire directrice, il faut que la valeur de N déduite de l'équation (2), quand s aura été

obtenu en fonction du temps, soit positive ou que $\frac{ds}{dt} > 0$. D'où il suit que le dénominateur du premier membre de l'équation (5) doit être constamment positif, ou encore que l'équation obtenue en l'égalant à zéro ait ses deux racines réelles et inégales et que la valeur variable de s reste comprise entre ces deux racines. Il faut donc que l'on ait

$$a^2\beta^2 > 4B\mu\cos\alpha,$$

condition qui sera toujours remplie lorsque le centre de gravité du corps se trouvera au-dessous du point fixe, mais qui pourra fort bien ne pas l'être lorsqu'il sera au-dessus et que α, ou la vitesse initiale de rotation du corps autour de son axe, se trouvera au-dessous d'une certaine limite, cas dans lequel la tige ne suivra pas le cercle directeur.

Soient

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta &= \frac{a\beta + \sqrt{a^2\beta^2 - 4B\mu\cos\alpha}}{2B\cot\alpha}, \\ \delta' &= \frac{a\beta - \sqrt{a^2\beta^2 - 4\mu B\cos\alpha}}{2B\cot\alpha}, \end{aligned}\right.$$

les racines, dans l'ordre de grandeur, de l'équation ci-dessus; la première sera toujours positive, mais la seconde sera positive ou négative, selon que le centre de gravité du corps se trouvera au-dessus ou au-dessous du point fixe. L'équation (5) peut s'écrire ainsi

$$ds\left(\frac{1}{s-\delta} - \frac{1}{s-\delta'}\right) = -f\cot\alpha.(\delta - \delta')dt,$$

d'où, en appelant s_0 la valeur de s correspondant à $t = 0$,

$$\frac{s-\delta}{s-\delta'} = \frac{s_0-\delta}{s_0-\delta'}e^{-f\cot\alpha.(\delta-\delta')t},$$

et enfin

$$(7)\qquad q = \delta - \frac{(\delta-\delta')(\delta-s_0)e^{-f\cot\alpha.(\delta-\delta')t}}{(s_0-\delta') + (\delta-s_0)e^{-f\cot\alpha.(\delta-\delta')t}}.$$

Comme $(\delta - s_0)$ est nécessairement positif, d'après ce que nous avons vu plus haut, on voit que la rotation s croît rapidement en même temps que le temps augmente, et qu'au bout d'un temps plus ou moins court elle devient sensiblement constante et égale à δ.

Mais pour que s puisse atteindre cette limite, il faut que l'équation (3) donne pour N une valeur correspondante positive, ou que

$$\delta < \beta \frac{b}{B},$$

ou, en remplaçant δ par sa valeur et réduisant,

$$-B\mu < \frac{\beta^2 b}{\sin\alpha}(b\cot\alpha - a).$$

Si cette condition n'est pas remplie, la rotation autour de l'axe du corps s'éteindra, ou le corps sera réduit au repos avant d'avoir atteint un mouvement de rotation sensiblement uniforme autour de la verticale du point fixe.

Soit θ l'angle dont le plan VOx a tourné autour de la verticale OV, au bout du temps t, on a

$$\frac{s}{\sin\alpha} = \frac{d\theta}{dt},$$

et l'équation (7) donne par suite

$$(8)\quad \theta\sin\alpha = \delta t + \frac{1}{f\cot\alpha}\log\left\{1 - \left(\frac{\delta - s_0}{\delta - \delta'}\right)\left[1 - e^{-f\cot\alpha.(\delta - \delta')t}\right]\right\}.$$

Nous supposerons dorénavant que l'origine du temps correspond à l'instant qui suit le choc de la tige contre le disque. Il nous reste maintenant à calculer les valeurs initiales n_0 et s_0 de n et s, et par suite β en fonction des composantes de la rotation instantanée du mobile à l'instant qui précède le choc, et que nous désignerons par les lettres n', r', s'; soit N' la pression variable exercée par la tige du corps sur le disque pendant la durée du choc.

Les axes Ox, Oy, Oz n'ayant pas varié sensiblement de position pendant cette période, peuvent être considérés comme fixes, et si l'on néglige la pesanteur par rapport à N', ainsi qu'on le fait d'habitude dans ces sortes de questions, on a les trois équations

$$(9)\qquad \begin{cases} A(n'-n_0) = +af\int N'dt, \\ \qquad -Br' = b\int N'dt, \\ B(s'-s_0) = -bf\int N'dt, \end{cases}$$

d'où

$$(10)\qquad \begin{cases} n_0 = n' - f\cdot\dfrac{B}{A}\cdot\dfrac{a}{b}r', \\ s_0 = s' + fr', \end{cases}$$

et l'équation (3) devient, en y remplaçant n et s par ces valeurs,

$$(11)\qquad \frac{An_0}{a} + \frac{Bs_0}{b} = \beta = \frac{An'}{a} + \frac{Bs'}{b}.$$

Il ne faut pas oublier que, pour qu'il y ait choc, il faut que r' soit négatif, ce qu'exprime d'ailleurs la seconde équation (9).

Il nous reste maintenant à déterminer dans quels cas la condition trouvée plus haut

$$s_0 \begin{matrix} > \delta' \\ < \delta \end{matrix},$$

nécessaire pour que la tige puisse adhérer au disque, peut être remplie.

Pour plus de simplicité, nous ne considérerons que le cas où n' ou β est assez grand pour que l'on puisse négliger le carré du rapport de $4B\mu\cot\alpha$ à $a^2\beta^2$. Dans ce cas, la seconde équation (6) donne

$$\delta' = \frac{\mu}{a\beta} = \frac{\mu\sin\alpha}{\dfrac{An'}{a} + \dfrac{s'a}{b}},$$

la première condition se ramène donc à l'inégalité

$$\left(An' + \frac{Bs'a}{b}\right)(s' + fr') > \mu \sin\alpha.$$

Or pour le cas considéré nous avons trouvé aux notations près (p. 354), μ représentant la valeur de Mgl, α' étant la valeur de α lorsque le corps est entièrement libre,

$$\alpha' = \alpha'_0 + \frac{2\mu B \sin\alpha'_0}{A^2 n'^2} \sin^2 \frac{An'}{2B} t,$$

$$s' = \frac{2\mu \sin\alpha'_0}{An'} \sin^2 \frac{An't}{2B},$$

d'où

$$r' = \frac{d\alpha'}{dt} = \frac{2\mu \sin\alpha'_0}{An'} \cdot \sin\frac{An't}{2B} \cos\frac{An't}{2B}.$$

Ces formules supposent que le temps est compté à partir du moment où l'on a imprimé la rotation n' au mobile, sans rotation composante suivant Oy et Oz.

Si donc on remarque que $\frac{Bs'a}{b}$ est négligeable par rapport à An', d'autant plus que $\frac{a}{b}$ est généralement une petite fraction, l'inégalité $q_0 > \delta'$ devient, en négligeant de plus la petite différence entre α'_0 et $\alpha' = \alpha$,

$$\tang^2 \frac{An't}{2B} + 2f \tang \frac{An't}{B} \lessgtr 1.$$

La première inégalité étant relative au cas où μ est positif et la seconde au cas contraire, les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le premier membre de cette inégalité, sont inégales. Il y a donc une infinité de valeurs de t qui peuvent satisfaire à ces deux inégalités; par conséquent, on comprend que, à un moment donné, le choc soit suivi d'une rotation directe de la tige du corps autour de la verticale du point fixe en s'appuyant sur le disque.

Quant à l'inégalité $q_0 < \delta$, elle se réduit à

$$A n'^2 > 2\mu B \cos\alpha \left(\sin^2\frac{A n' t}{2B} + f \sin\frac{A n' t}{2B} \cos\frac{A n' t}{2B}\right),$$

en réduisant δ à son premier terme $\frac{aB}{B\cot\alpha}$; elle est toujours satisfaite, quel que soit le signe du second membre, pourvu que n' soit suffisamment grand.

7. *Mouvement d'un corps pesant de révolution assujetti à glisser par un point de son axe sur un plan horizontal.* — Conservons les notations du n° 3 (*fig.* 73), en supposant que les axes coordonnés aient été transportés parallèlement à eux-mêmes au centre de gravité G du solide. Soient O le point d'appui, l la longueur OG, w la composante horizontale de la vitesse du centre de gravité, qui sera constante en négligeant le frottement. Il est clair que dans cette hypothèse la rotation n sera constante pendant toute la durée du mouvement.

La composante verticale de la vitesse de G est égale et contraire à la même composante de la vitesse du point O par rapport à ce centre, c'est-à-dire à $rl \sin\alpha$. Le principe représenté par la formule (7), n° 2, donne par suite

$$(h) \quad \left\{ \begin{aligned} &B(r^2 + s^2 - r_0^2 - s_0^2) + M l^2 (r^2 \sin^2\alpha - r'_0 \sin^2\alpha_0) \\ &\quad = 2 M g l (\cos\alpha_0 - \cos\alpha). \end{aligned} \right.$$

Le moment des quantités de mouvement rotatoires autour de G, estimé par rapport à la verticale, étant constant, on a l'équation

$$(i) \qquad A n \cos\alpha + B s \sin\alpha = A n \cos\alpha_0 + B s_0 \sin\alpha_0.$$

Des équations (h) et (i) on déduit

$$(j) \qquad s = \frac{A n (\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + B s_0 \sin\alpha_0}{\sin\alpha},$$

$$(k) \quad r = \pm \sqrt{\frac{2 M g l (\cos\alpha - \cos\alpha_0) + M l^2 r_0^2 \sin^2\alpha_0 + B(r_0^2 + s_0^2) - \frac{[A n (\cos\alpha - \cos\alpha_0) + B r_0 \sin\alpha_0]^2}{B \sin^2\alpha}}{B + M l^2 \sin^2\alpha}},$$

formules analogues aux formules (*c*) et (*d*) du n° 3, conduisant aux mêmes conséquences, et qui donnent l'explication des différentes phases du mouvement de la toupie.

Le point O décrira par rapport au centre de gravité et en projection horizontale une courbe ondulée, limitée aux circonférences, ayant pour diamètres $l \sin\alpha_1$, $l \sin\alpha_2$, α_1 et α_2 étant les valeurs extrêmes de α. Le rayon vecteur de cette courbe étant exprimé par $\rho = l \sin\alpha$, l'angle θ qu'il forme avec une horizontale passant par le point G et mobile avec lui se déduira de la relation

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{s}{\sin\alpha}.$$

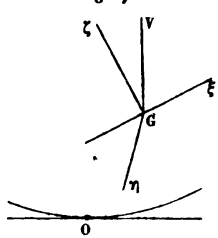
L'angle V formé par la tangente à la courbe avec le rayon vecteur sera, par suite, donné par

$$\operatorname{tang} V = \frac{s}{\frac{d\alpha}{dt}\cos\alpha} = \frac{s}{r\cos\alpha}.$$

On voit ainsi que la courbe sera en général tangente aux deux circonférences extrêmes. Cependant si pour l'une des valeurs α_1, α_2; s est nul, la courbe pourra être normale au cercle correspondant. C'est ce qui arrivera notamment pour le cercle intérieur, lorsque r_0 et s_0 seront nuls.

8. *Mouvement d'un corps pesant de révolution reposant sur un plan horizontal.* — Soient (*fig.* 76)

Fig. 76.



G le centre de gravité du corps ;

G ξ son axe de révolution ;

O son point de contact avec le plan nécessairement situé dans le plan vertical passant par cet axe ;

α l'angle formé par G ξ avec la verticale GV ;

G ζ la perpendiculaire en G à G ξ dans le plan GO ξ ;

$G\eta$ la perpendiculaire menée au même point de ce plan;

M la masse du corps;

A, B les moments d'inertie du corps par rapport à $G\xi$, $G\eta$ ou $G\zeta$;

n, r, s les composantes de la rotation suivant $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$;

ξ, ζ les coordonnées du point O par rapport à $G\xi$, $G\zeta$.

La rotation n étant constante, on a

$$(A) \qquad An(\cos\alpha - \cos\alpha_0) + B(s\sin\alpha - s_0\sin\alpha_0) = 0,$$

$$(B) \qquad r = \frac{d\alpha}{dt}.$$

La vitesse du point O par rapport au point G a pour composantes respectives suivant $G\xi$ et $G\zeta$, $r\zeta$ et $-r\xi$; la composante verticale de cette vitesse, égale en grandeur à la même composante de la vitesse du centre de gravité, a par suite pour expression

$$r(\zeta\cos\alpha - \xi\sin\alpha).$$

La projection de GO sur la verticale étant $\xi\cos\alpha + \zeta\sin\alpha$, le principe des forces vives donne

$$(C) \qquad \left\{\begin{aligned} &B(s^2 + r^2) + Mr^2(\zeta\cos\alpha - \xi\sin\alpha)^2 \\ &\quad = 2Mg[\xi\cos\alpha + \zeta\sin\alpha - \xi_0\cos\alpha_0 - \zeta_0\sin\alpha_0] \\ &\quad + B(s_0^2 + r_0^2) + Mr_0^2(\zeta_0\cos\alpha_0 - \xi_0\sin\alpha_0)^2. \end{aligned}\right.$$

L'équation $f(\xi, \zeta) = 0$ de la courbe méridienne du solide, jointe à la relation $\tang\alpha = -\frac{d\zeta}{d\xi}$, fera connaître les valeurs de ξ et ζ en fonction de α, que l'on substituera ensuite dans les formules (A) et (C).

Ces dernières donnent les suivantes :

$$\text{(D)} \qquad s = \frac{An(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + Bs_0 \sin\alpha_0}{B\sin\alpha},$$

$$\text{(E)} \quad r = \pm\sqrt{\frac{2Mg(\xi\cos\alpha + \zeta\sin\alpha - \xi_0\cos\alpha_0 - \zeta_0\sin\alpha_0) + B(s_0^2 + r_0^2) + Mr_0^2(\zeta_0\cos\alpha_0 - \xi_0\sin\alpha_0)^2 - \frac{[An(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + Bs_0\sin\alpha_0]^2}{B\sin^2\alpha}}{B + M(\zeta\cos\alpha - \xi\sin\alpha)^2}}.$$

De la discussion de ces formules, il suit que l'axe $G\xi$ oscillera en général dans le plan mobile $VG\xi$ de part et d'autre de sa position initiale sans passer par la verticale ; et on déterminera les deux limites de α, en cherchant les valeurs de cet angle qui annulent le radical et choisissant celles qui, comprenant l'angle α_0, en diffèrent le moins. Pour les mêmes valeurs de α, dans les demi-oscillations de sens contraire, s conservera la même valeur et le même signe ; r, tout en conservant la même valeur, changera de signe.

Dans le cas où $An\cos\alpha_0 + Br_0\sin\alpha_0 = An$, on a

$$\text{(F)} \qquad s_0 = \frac{An}{B}\operatorname{tang}\frac{\alpha_0}{2}, \quad s = \frac{An}{B}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2},$$

$$\text{(G)} \quad r = \sqrt{\frac{2Mg(\xi\cos\alpha + \zeta\sin\alpha - \xi_0\cos\alpha_0 - \zeta_0\sin\alpha_0) + Br_0^2 + Mr_0^2(\zeta_0\cos\alpha_0 - \xi_0\sin\alpha_0)^2 - \frac{A^2n^2}{B}\left(\operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tang}^2\frac{\alpha_0}{2}\right)}{B - M(\zeta\cos\alpha - \xi\sin\alpha)^2}};$$

l'axe Gx pourra passer par la verticale GV, et il suffit pour cela, en appelant a la distance du point G à celle des extrémités de cet axe qui tend à se mettre en contact avec le plan, que

$$\left.\begin{array}{l} 2Mg(a - r_0\cos\alpha_0 - \zeta_0\sin\alpha_0) \\ + Br_0^2 + Mr_0^2(\zeta_0\cos\alpha_0 - \xi_0\sin\alpha_0)^2 + \dfrac{A^2n^2}{B}\tang^2\dfrac{\alpha_0}{2} \end{array}\right\} > 0.$$

La quantité sous le radical dans la valeur de r se compose d'une quantité positive indépendante de n, dont le maximum, que je représenterai par Q, a une valeur déterminée. L'angle α oscillera entre des limites qui satisferont à la condition

$$\frac{[An(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + Br_0\sin\alpha_0]^2}{B\sin^2\alpha} < Q,$$

et à fortiori à

$$[An(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + Br_0\sin\alpha_0]^2 < BQ.$$

Il suit de là que plus la rotation n autour de l'axe du corps sera grande, plus les écarts de cet axe de part et d'autre de sa position initiale rapportés à la verticale seront petits, car plus $\cos\alpha_0 - \cos\alpha$ sera petit lui-même et plus n sera petit, plus les écarts seront considérables.

Ces considérations théoriques ne se trouvent justifiées par l'expérience qu'autant que les surfaces en contact sont suffisamment polies pour que le frottement soit insensible, car autrement le solide, tout en oscillant, se relève rapidement jusqu'au moment où il repose sur l'une des extrémités de son axe. Il serait très-intéressant de pouvoir traiter les questions en y introduisant ce nouvel élément; malheureusement on est arrêté par des difficultés de calcul inextricables.

NOTE V.

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT RELATIF D'UN CORPS SOLIDE.

1. *Mouvement relatif du centre de gravité d'un système de points matériels.* — Si l'on multiplie l'équation (1) du n° 158 par la masse m du point auquel elle s'applique, et que l'on ajoute membre à membre les équations ainsi obtenues pour tous les points matériels du système, il vient

$$\Sigma m \frac{d^2 x}{dt^2} = 2\omega\left(\cos\beta\, \Sigma m \frac{dz}{dt} - \cos\gamma\, \Sigma m \frac{dy}{dt}\right) + \Sigma m X - \Sigma m X_e,$$

ou, en désignant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité de la masse totale M,

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 2\omega\left(\cos\beta\, M \frac{dz_1}{dt} - \cos\gamma\, M \frac{dy_1}{dt}\right) + \Sigma m X - \Sigma m X_e,$$

équation dans laquelle les actions mutuelles disparaissent. Or les forces d'entraînement prises en sens contraire n'étant autre chose que les forces d'inertie des points ci-dessus, considérés comme faisant partie du système invariable (S), $\Sigma m X_e$ est égale à la projection sur l'axe des x de la force d'entraînement du centre de gravité en y supposant concentrée la masse M. Il résulte de là et de la comparaison entre l'équation précédente et l'équation (1) du numéro précité, que *le centre de gravité d'un assemblage de points*

matériels se meut par rapport au système invariable (S), *comme un point unique où serait concentrée la masse totale* M *en y supposant appliquées toutes les forces extérieures agissant sur cet assemblage.*

2. *Équations générales du mouvement relatif par rapport à un système invariable d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un point faisant partie du système.* — Reportons-nous au n° 167, et supposons que le axes Ox, Oy, Oz soient les axes principaux passant par le point relativement fixe O.

Soient

A B, C les moments d'inertie principaux du corps correspondant aux axes Ox, Oy, Oz;

N, P, Q les moments par rapport aux mêmes axes des forces qui sollicitent le corps;

M la masse du corps;

u_x, u_y, u_z les composantes suivant Ox, Oy, Oz, de l'accélération d'entraînement du point O;

a, b, c les coordonnées du centre de gravité de M.

Posons

$$M(au_y - bu_z) = Q',$$
$$M(cu_x - au_z) = P',$$
$$M(bu_z - cu_y) = N'.$$

L'équation du mouvement absolu du corps correspondant à l'axe Ox a pour expression

$$(a) \qquad A\frac{dn_a}{dt} + (C - B)p_a q_a = N - N',$$

et pour obtenir l'équation équivalente dans le mouvement relatif, il suffit d'y remplacer n_a, p_a, q_a, $\frac{dn_a}{dt}$, $\frac{dp_a}{dt}$, $\frac{dq_a}{dt}$, par

leurs valeurs en fonction de n, p, q, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$ et les éléments du mouvement d'entraînement.

On a d'abord

$$p_a = p + p_e, \quad q_a = q + q_e$$

et

$$(b) \qquad p_a q_a = pq + p_e q_e + pq_e + qp_e.$$

D'ailleurs (167)

$$(c) \qquad \frac{dn_a}{dt} = \frac{dn}{dt} + \mathcal{A}_x + qp_e - pq_e.$$

L'équation (a) devient donc, en ayant égard aux valeurs (b) et (c),

$$(1)\left\{\begin{array}{l} A\frac{dn}{dt} + (C-B)pq = N - N' - \left\{\begin{array}{l} A\mathcal{A}_x + (C-B)p_e q_e \\ + qp_e(A+C-B) \\ - pq_e(A+B-C) \end{array}\right\}, \\ \quad \text{et par analogie} \\ B\frac{dp}{dt} + (A-C)nq = P - P' - \left\{\begin{array}{l} B\mathcal{A}_y + (A-C)n_e q_e \\ + nq_e(A+B-C) \\ - n_e q(B+C-A) \end{array}\right\}, \\ C\frac{dq}{dt} + (B-A)np = Q - Q' - \left\{\begin{array}{l} C\mathcal{A}_z + (B-A)n_e p_e \\ + pn_e(B+C-A) \\ - p_e n(A+C-B) \end{array}\right\}. \end{array}\right.$$

Telles sont les équations générales du mouvement relatif d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un point fixe dans le milieu auquel on rapporte le mouvement. Ces équations, dans lesquelles on devra remplacer $\mathcal{A}_x$, $\mathcal{A}_y$, $\mathcal{A}_z$, n_e, p_e, q_e, en fonction de ν_e, π_e, χ_e qui seront en général des données relatives au mouvement de (S), sont spécialement applicables au mouvement relatif d'un solide autour

de son centre de gravité; dans ce cas les moments N', P', Q' sont nuls.

Si N'', P'', Q'' représentent les moments par rapport aux axes Ox, Oy, Oz des forces apparentes qu'il faut introduire pour ramener la considération du mouvement relatif à celle du mouvement absolu, on a

$$(d)\left\{\begin{aligned} N'' &= -N' - \left\{\begin{array}{l} A\mathcal{A}_x + (C-B)p_e q_e \\ + qp_e(A+C-B) - pq_e(A+B-C) \end{array}\right\}, \\ P'' &= -P' - \left\{\begin{array}{l} B\mathcal{A}_y + (A-C)n_e q_e \\ + nq_e(A+B-C) - n_e q(B+C-A) \end{array}\right\}, \\ Q'' &= -Q' - \left\{\begin{array}{l} C\mathcal{A}_z + (B-A)n_e p_e \\ + pn_e(B+C-A) - p_e n(A+C-B) \end{array}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Soient $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_e$ le travail des forces extérieures agissant sur le solide et le travail des forces d'entraînement; le principe des forces vives donne

$$(2) \qquad An^2 + Bp^2 + Cq^2 = 2\mathfrak{T} - 2\mathfrak{T}_e + \text{const.},$$

formule que l'on devra substituer à l'une des équations (1) lorsque l'on saura trouver les intégrales représentées par $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}_e$.

S'il s'agit d'un solide entièrement libre, pour lequel n, p, q représentent les composantes de la rotation apparente autour du centre de gravité, on a, d'après un autre principe, en appelant V la vitesse de ce centre,

$$(3) \qquad An^2 + Bp^2 + Cq^2 + PV^2 = 2\mathfrak{T} - 2\mathfrak{T}_e + \text{const.}$$

$\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}_e$ désignent ici les travaux des forces extérieures et d'entraînement dans le mouvement relatif général du solide.

Dans certains cas, il pourra être avantageux de remplacer l'une des équations (1) par celle qui résulte de la projection des moments des forces sur une droite fixe dans le milieu (S) faisant avec les axes Ox, Oy, Oz les angles variables

α, β, γ, et avec OX, OY, OZ les angles constants δ, γ, ε. Les moments des quantités de mouvement estimés suivant Ox, Oy, Oz étant An, Bp, Cq, il vient

$$\frac{d}{dt}(An\cos\alpha + Bp\cos\beta + Cq\cos\gamma)$$
$$= (N + N'')\cos\alpha + (P + P'')\cos\beta + (Q + Q'')\cos\gamma,$$

ou

$$(4)\quad \frac{d}{dt}(An\cos\alpha + Bp\cos\beta + Cq\cos\gamma) = \left\{\begin{array}{l} [N - N' - A\mathcal{A}_x - (C - B)p_e p_e]\cos\alpha \\ + [P - P' - B\mathcal{A}_y - (A - C)n_e q_e]\cos\beta \\ + [Q - Q' - C\mathcal{A}_z - (B - A)n_e p_e]\cos\gamma \\ - (B + C - A)n_e(p\cos\gamma - q\cos\beta) \\ - (A + C - B)p_e(q\cos\alpha - n\cos\gamma) \\ - (A + B - C)q_e(n\cos\beta - p\cos\alpha). \end{array}\right.$$

On substituera dans cette équation à $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ leurs valeurs en fonction de $\cos\delta$, $\cos\eta$, $\cos\varepsilon$, tirées des formules du n° 167, dans lesquelles on remplacera respectivement n_e, p_e, q_e par les trois premiers cosinus, et ν_e, π_e, χ_e par les trois derniers.

3. *Formules relatives au mouvement apparent des corps solides à la surface de la terre.* — Pour obtenir les formules applicables aux mouvements apparents des corps à la surface du globe, il suffit de supposer, dans ce qui précède, que (S) représente la terre. On a d'abord

$$\mathcal{A}_{ox} = 0, \quad \mathcal{A}_{oy} = 0, \quad \mathcal{A}_{oz} = 0.$$

La rotation de la terre étant très-petite, on peut en négliger le carré, par suite les termes en $p_e q_e$, $n_e p_e$, $n_e q_e$.

Du pendule composé. — Supposons que le corps soit uniquement soumis à l'action de la pesanteur et que l'axe principal d'inertie Oz passe par son centre de gravité ; appelons f la distance de ce centre au point O.

Nous prendrons pour parties positives des axes Ox, Oy, Oz, la portion de la méridienne dirigée vers l'équateur,

celle de la tangente au parallèle dirigée dans le sens de la rotation d'entraînement, c'est-à-dire de l'occident vers l'orient, enfin celle de la direction du fil à plomb située au-dessous du plan xOy.

Nous aurons d'abord, λ étant la latitude du lieu,

$$\nu_e = \omega_e \cos\lambda, \quad \pi_e = 0, \quad \chi_e = \omega_e \sin\lambda,$$

et les formules du n° 167 se réduisent ici à

$$(5) \quad \begin{cases} n_e = \omega_e[(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\theta)\cos\lambda \\ \qquad\qquad - \sin\lambda\sin\theta\sin\psi], \\ p_e = \omega_e[(\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta)\cos\lambda \\ \qquad\qquad + \sin\theta\cos\psi\sin\lambda], \\ q_e = \omega_e(\sin\varphi\sin\theta\cos\lambda + \cos\theta\sin\lambda). \end{cases}$$

Si l'on se rappelle que la valeur de l'accélération de la pesanteur observée en chaque point de la terre comprend l'accélération d'entraînement prise en sens contraire, le principe des forces vives donne

$$(2')\ \mathrm{A}n^2 + \mathrm{B}p^2 + \mathrm{C}q^2 = 2\mu g f(\cos\theta_0 - \cos\theta) + \mathrm{A}n_0^2 + \mathrm{B}p_0^2 + \mathrm{C}q_0^2,$$

θ_0, n_0, p_0, q_0 désignant les valeurs initiales de θ, n, p, q, et μ la masse du corps.

Les quantités $\mathrm{N} - \mathrm{N}'$, $\mathrm{P} - \mathrm{P}'$, $\mathrm{Q} - \mathrm{Q}'$, sont les moments par rapport aux axes Ox, Oy, Oz de la résultante de l'attraction terrestre, de la force d'inertie correspondant à l'accélération centripète d'entraînement du point O, supposée transportée ainsi que toute la masse μ au centre de gravité G du corps. Mais comme les dimensions des corps que nous considérons à la surface de la terre sont relativement très-petites, on peut, sans erreur, regarder comme égales les accélérations centripètes d'entraînement en O et G ; ce qui revient à supposer que $\mathrm{N} - \mathrm{N}'$, $\mathrm{P} - \mathrm{P}'$, $\mathrm{Q} - \mathrm{Q}'$, représentent les moments du poids du corps, tel qu'on l'apprécie au lieu de l'observation. La dernière formule (1) devient

dès lors

$$(1')\quad C\frac{dq}{dt}+(B-A)np=-pn_e(B+C-A)+p_en(A+C-B).$$

Enfin nous prendrons pour troisième équation celle des moments par rapport à la droite Oz :

$$(4')\quad \frac{d}{dt}(An\cos\alpha+Bp\cos\beta+Cq\cos\gamma)=-\begin{cases}(B+C-A)n_e(p\cos\gamma-q\cos\beta),\\(A+C-B)p_e(q\cos\alpha-n\cos\gamma),\\(A+B-C)q_e(n\cos\beta-p\cos\alpha),\end{cases}$$

et par des substitutions faciles à faire, qui n'ont que l'inconvénient d'être assez longues, les équations (5), (1'), (2'), (4'); donneront les équations différentielles en φ, ψ, θ, t dont le problème dépend.

L'étude du mouvement apparent d'un corps solide pesant autour d'un point fixe sur la terre ne conduit à quelques résultats simples que lorsque ce solide est de révolution autour de l'axe Oz. Aussi nous bornerons-nous à poser les équations définitives du mouvement qui se rapportent à ce cas particulier pour lequel les transformations analytiques intermédiaires présentent de notables simplifications.

L'hypothèse $A=B$ réduit l'équation (1') à

$$(\alpha)\qquad \frac{dq}{dt}=np_e-n_ep.$$

Or np_e-n_ep n'est autre chose que la projection sur Oz de l'accélération angulaire composée et, pour l'obtenir, on peut substituer aux axes Ox, Oy, la considération des droites rectangulaires OA et OB situées dans le même plan. En supposant $\psi=0$ dans les deux premières formules (5), on obtient

$$\omega_e\cos\varphi\cos\lambda,\qquad \omega_e(-\sin\varphi\cos\theta\cos\lambda+\sin\theta\sin\lambda),$$

pour les composantes de ω suivant OA et OB, par suite

$$np_e - n_e p = r.\,\omega_e(-\sin\varphi\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda) - s\omega_e\cos\varphi\cos\lambda$$
$$= \omega_e\left[-\cos\lambda\left(\cos\varphi\sin\theta\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right) + \sin\lambda\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right],$$

$$\frac{dq}{dt} = \omega_e\left(-\cos\lambda\frac{d\sin\varphi\sin\theta}{dt} - \sin\lambda\frac{d\cos\theta}{dt}\right),$$

et en intégrant

$$(1'')\quad \begin{cases} q = q_0 + \omega_e\cos\lambda(\sin\varphi_0\sin\theta_0 - \sin\varphi\sin\theta) \\ \quad + \omega_e\sin\lambda(\cos\theta_0 - \cos\theta). \end{cases}$$

La formule (2′) devient, en remarquant que

$$A(n^2 + p^2) = A(r^2 + s^2) = A\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right)$$

et en négligeant le terme en ω_e^2 dans la valeur de Cq^2,

$$(2'')\quad \begin{cases} A\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right) = 2\mu gf(\cos\theta_0 - \cos\theta) + A(r_0^2 + s_0^2) \\ -2Cq_0\omega_e[\cos\lambda(\sin\varphi_0\sin\theta_0 - \sin\varphi\sin\theta) + \sin\lambda(\cos\theta_0 + \cos\theta)]. \end{cases}$$

Occupons-nous maintenant de la transformation de la formule (4′), qui devient dans le cas actuel

$$(\beta)\quad \begin{cases} \frac{d}{dt}[A(n\cos\alpha + p\cos\beta) + Cq\cos\gamma] = -C[n_e(p\cos\gamma - q\cos\beta) \\ +p_e(q\cos\alpha - n\cos\gamma)] - (2A - C)q_e(n\cos\beta - p\cos\alpha). \end{cases}$$

La projection $n\cos\alpha + p\cos\beta$ sur Oz de la rotation ω estimée dans le plan xOy se réduit évidemment à celle $s\sin\theta = \frac{d\varphi}{dt}\sin^2\theta$ de s; et comme $\gamma = \theta$, on a

$$A(n\cos\alpha + p\cos\beta) + Cq\cos\gamma = A\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} + Cq\cos\theta.$$

Il est facile de reconnaître que le second membre de l'équa-

tion (β) est indépendant de la position des axes Ox et Oz dans le plan xOy. A cet effet, portons à partir du point O dans un sens convenable, sur la perpendiculaire en ce point au plan déterminé par OZ et ω une longueur Γ égale au double de l'aire du triangle ayant pour côtés l'unité et ω_e dirigés suivant ces deux directions ; on a, en appelant Γ_x, Γ_y et Γ_z les projections de Γ sur Ox, Oy et Oz,

$$p\cos\gamma - q\cos\beta = \Gamma_z, \quad n\cos\beta - p\cos\alpha = \Gamma_z,$$
$$q\cos\alpha - n\cos\gamma = \Gamma_y,$$

et $n_e\Gamma_x + p_e\Gamma_y$ n'est autre chose que le produit des projections de ω_e et de Γ sur le plan xOy multiplié par le cosinus de leur angle. Nous pouvons donc substituer aux axes Ox, Oy, les droites OA et OB, ou supposer

$$\psi = 0, \quad \beta = 90^\circ - \theta, \quad \gamma = \theta, \quad \alpha = 90^\circ,$$
$$q_e = \omega_e(\cos\theta\sin\lambda + \cos\lambda\sin\varphi\sin\theta),$$

remplacer n et p par

$$r = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{et} \quad s = \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta,$$

n_e et p_e par

$$\omega_e\cos\varphi\cos\lambda$$

et

$$\omega_e(-\sin\varphi\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda);$$

il vient ainsi pour le second membre de (β)

$$-\omega_e C\left[\cos\varphi\cos\lambda\left(\sin\theta\cos\theta\frac{d\varphi}{dt} - q\sin\theta\right)\right.$$
$$\left.-(-\sin\varphi\cos\theta\cos\lambda + \sin\theta\sin\lambda)\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right]$$
$$-(2A - C)\omega_e\sin\theta\frac{d\theta}{dt}(\cos\theta\sin\lambda + \cos\lambda\sin\varphi\sin\theta),$$

et en réduisant et négligeant le carré de ω_e

$$(3'')\quad \left\{\begin{array}{l} A\dfrac{d}{dt}\sin^2\theta\dfrac{d}{dt}(\varphi+\omega_e\sin\lambda.t) = -Cq_0\dfrac{d\cos\theta}{dt} \\ +\omega_e\cos\lambda\left\{\begin{array}{l} +Cq_0\sin\theta\cos\varphi - C\sin\varphi_0\sin\theta_0\dfrac{d\cos\theta}{dt} \\ -2A\sin^2\theta\sin\varphi\dfrac{d\theta}{dt} \end{array}\right. \\ -C\omega_e\sin\lambda\cos\theta_0\dfrac{d\cos\theta}{dt}. \end{array}\right.$$

Si, comme dans l'expérience exécutée par M. Foucault au Panthéon, $\frac{C}{A}$ est assez petit pour que l'on puisse le négliger devant l'unité dans les termes en ω_e, la rotation initiale q_0 étant d'ailleurs nulle, les formules $(2'')$ et $(3'')$ se réduisent aux suivantes :

$$\left(\frac{d\theta^2}{dt^2}+\sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right) = 2(\cos\theta_0-\cos\theta)\frac{\mu g f}{A},$$

$$\frac{d}{dt}\sin^2\theta\frac{d}{dt}(\varphi-\omega\sin\lambda\, t) = 2\omega_e\cos\lambda\sin\varphi\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt},$$

qui sont celles qui se rapportent au mouvement oscillatoire d'un pendule simple ayant pour longueur $\frac{A}{\mu f}$.

Du gyroscope.—Supposons maintenant que le point fixe du corps coïncide avec son centre de gravité, ou que $f=0$. Dans cette hypothèse, les formules $(1'')$, $(2'')$, $(3'')$ ne supposent pas nécessairement que le plan XOY est horizontal; il nous suffit d'admettre que ce plan étant choisi arbitrairement, le plan XOZ est parallèle à l'axe de la terre et que λ, cessant de représenter la latitude, est l'angle que forme cet axe avec OX.

La formule (2″) devient

$$(2''')\quad \left\{\begin{aligned} &A\left(\frac{d\theta^2}{dt^2}+\sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right)\\ &=-2Cq_0\omega_e\left[\begin{matrix}\cos\lambda(\sin\varphi_0\sin\theta_0-\sin\varphi\sin\theta)\\+\sin\lambda(\cos\theta_0-\cos\theta)\end{matrix}\right]+A(r_0^2+s_0^2).\end{aligned}\right.$$

Si nous supposons que la composante q_0 de la rotation initiale soit très-considérable, on pourra sans erreur sensible réduire la formule (3″) à

$$\frac{Ad}{dt}\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt}=-Cq_0\frac{d\cos\theta}{dt},$$

et en intégrant et remarquant que

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0=\frac{s_0}{\sin\theta_0},$$

il vient

$$(3''')\qquad A\sin^2\theta\cdot\frac{d\varphi}{dt}=Cq_0(\cos\theta_0-\cos\theta)+As_0\sin\theta_0.$$

Si nous prenons OZ parallèle à l'axe de la terre, on a $\lambda=90^0$, et (2‴) devient

$$(\gamma)\quad \frac{d\theta^2}{dt^2}+\sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2}=-2\omega_e q_0\frac{C}{A}(\cos\theta_0-\cos\theta)+r_0^2+s_0^2,$$

et en éliminant φ entre (3″) et (γ)

$$(\delta)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{d\theta^2}{dt^2}&=2\omega_e q_0\frac{C}{A}(\cos\theta-\cos\theta_0)\\&-\left[\frac{\frac{C}{A}q_0(\cos\theta_0-\cos\theta)+s_0\sin\theta_0}{\sin\theta}\right]^2+r_0^2+s_0^2.\end{aligned}\right.$$

A l'inspection des formules (3‴), (γ), (δ), on reconnaît que la loi du mouvement est la même que pour un solide pesant de révolution dont un point de l'axe est fixe sur la

terre supposée immobile; l'axe du corps oscille dans le plan mobile passant par OZ entre deux limites que l'on déterminera facilement.

Dans le cas particulier où $s_0 = 0$, $r_0 = 0$, l'une de ces limites est θ; l'autre est donnée par

$$2\omega_e - \frac{Cq_0}{A}\left(\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin^2\theta}\right) = 0.$$

Soit $\theta = \theta_0 + \varepsilon$, ε étant d'un même ordre de grandeur que ω_e, il vient

$$2\omega_e + \frac{Cq_0}{A\sin\theta_0}\cdot\varepsilon = 0,$$

et pour l'écart maximum

$$\varepsilon = -2\omega_e\cdot\frac{A\sin\theta_0}{Cq_0}.$$

Cette valeur, étant de signe contraire à q_0, conviendra toujours, car, pour que $\frac{d\theta}{dt}$ soit réel, il faut que θ décroisse ou croisse à partir de θ_0 selon que q_0 est positif ou négatif.

En général, l'axe du corps ne deviendra jamais perpendiculaire à XOY, à moins que

$$Cq_0\cos\theta_0 + Am_0\sin\theta_0 = Cq_0,$$

dans ce cas l'équation (3‴) devient

$$Am = Cq_0\cdot\frac{(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta} = Cq_0.\tang\frac{\theta}{2},$$

et l'équation (δ)

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2q_0\omega_e\cdot\frac{C}{A}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$
$$- \frac{C^2q_0^2}{A^2}\left(\tang^2\frac{\theta}{2} - \tang^2\frac{\theta_0}{2}\right),$$

et une discussion simple permettra de déterminer les autres conditions à remplir pour que l'axe passe par OZ.

Si $\theta_0 = 0$, le corps sera en équilibre relatif; car les formules (γ), (δ) ne peuvent être vérifiées que par $\theta = \theta_0$.

Admettons maintenant que l'axe du corps soit assujetti à rester dans un plan fixe XOY, ce qui suppose que l'on exerce en un point de cet axe une pression normale au plan d'une énergie suffisante. Les formules ($1''$) et ($2''$) peuvent encore recevoir ici leur application en y supposant $\theta = 90^\circ$ et $r_0 = 0$; mais on ne pourra plus prendre l'équation (δ), parce que le terme en q_0, par rapport auquel nous avons négligé ceux en ω_e dans l'équation ($3''$) est nul, et il faudrait nous reporter à cette première équation; mais la formule ($2''$) suffit pour résoudre le problème; elle donne

$$\frac{d\varphi^2}{dt^2} = 2\frac{C}{A} q_0 \omega_e (\sin\varphi_0 - \sin\varphi)\cos\lambda + A s_0^2,$$

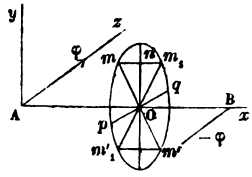
et comme φ est ici le complément que forme l'axe du corps avec OX, il s'ensuit que la première de ces droites oscillera de part et d'autre de la seconde, comme un pendule simple, de longueur égale à l'unité, soumis à l'action d'une force constante parallèle à OX, égale à $\frac{Cq_0}{A}\cos\lambda$ et dont s_0 serait la vitesse initiale, ce qui donne l'explication du gyroscope de M. Foucault.

Mais on peut arriver plus simplement aux résultats ci-dessus, en comparant directement, comme nous allons le faire maintenant, les forces centrifuges composées.

4. *De la réduction des forces centrifuges composées dans les mouvements relatifs angulaires des solides de révolution.* — Soient ω' la vitesse angulaire d'un solide de révolution de masse M, mobile autour de son axe de figure Ax (*fig.* 77, p. 392) entraîné lui-même dans le mouvement d'un système invariable (S); A le moment d'inertie de M par rapport à cet axe; Az la parallèle à l'axe instantané de rotation de (S) menée par un point quelconque A de Ax; ω.

la rotation instantanée de (S); α l'angle zAx. Nous supposerons, pour fixer les idées, que les rotations ω', ω ont lieu de la gauche vers la droite pour l'observateur couché suivant Ax, Az, en ayant les pieds en A.

Fig. 77.



La force centrifuge composée correspondant à un point matériel m de M étant la résultante des forces analogues relatives aux composantes $\omega\cos\alpha$, $\omega\sin\alpha$ de ω, estimées suivant Ax, et la perpendiculaire Ay à Ax dans le plan zAx, on est ramené à étudier séparément chacune de ces rotations partielles.

Soient pq la trace d'un parallèle quelconque de M sur le plan mené par Ax perpendiculairement à Ay; mm', $m_1m'_1$ deux diamètres symétriques par rapport à pq de l'une des circonférences matérielles dans lesquelles on peut décomposer le corps; n la projection de m sur pq. Les forces centrifuges composées résultant de la rotation partielle $\omega\cos\alpha$ autour de Ax s'entre-détruisent; car celles de ces forces qui se rapportent aux molécules m_1, m'_1, dirigées toutes deux suivant mm', sont égales et de sens contraire.

Les forces centrifuges composées de m, m' et m_1, m'_1 correspondant à la rotation $\omega\sin\alpha$ autour de Ay, se réduisant à deux couples symétriques par rapport au plan yAx, dont les forces parallèles à Ax ont pour expression $2m.\omega\omega'\sin\alpha.mn$, il s'ensuit que les forces centrifuges composées des différents points de la circonférence $m_1mm'm'_1$ se réduisent à un couple situé dans le plan yAx et dont le moment est exprimé par

$$2\omega\omega'\sin\alpha\Sigma m.\overline{mn}^2 = 2\omega\omega'\sin\alpha\Sigma m.\overline{Om}^2 = A\omega\omega'\sin\alpha.$$

Si sur l'axe Ax on porte une longueur quelconque $AB = l$, à partir du point A, ce couple sera équivalent au couple formé par les deux forces parallèles constantes φ, $-\varphi$ égales

à $\frac{A\omega\omega'}{l}$ agissant respectivement aux points A et B et dont la première est dirigée suivant Az.

En supposant que (S) représente la terre, que le centre de gravité A du corps soit relativement fixe, ce corps se mouvra autour de Az, en suivant la même loi qu'un solide pesant de révolution dont un point de l'axe serait rendu fixe, dont le moment d'inertie et la vitesse angulaire par rapport à cet axe seraient A et ω', et dont le moment du poids par rapport au point fixe serait $A\omega\omega'$. Dans le cas où la droite AB serait de plus assujettie à rester dans un plan formant avec Az un angle i, le corps M obéissant aux composantes $\varphi \cos i$, $-\varphi \cos i$ de φ, se mouvra comme un pendule, la droite AB oscillant de part et d'autre de la projection de Az sur le plan. Ces résultats sont conformes à ceux auxquels nous avons été conduits par l'analyse.

Dans ce dernier cas et pour de petites oscillations, la durée de chacune d'elles est donnée par

$$T = \pi \sqrt{\frac{C}{A\omega\omega' \cos i}},$$

C étant le moment d'inertie du solide par rapport à toute droite passant par le point A et perpendiculaire à Ax. Le temps T atteint son minimum

$$T' = \pi \sqrt{\frac{C}{A\omega'\omega}},$$

lorsque $i = 0$: c'est ce qui a lieu en prenant, par exemple, le méridien pour plan directeur. Si $i = 90^\circ$, on a $T = \infty$, et en effet l'équilibre est indifférent. En prenant l'horizon pour plan directeur, i est égal à la latitude λ, et il vient

$$T'' = \pi \sqrt{\frac{C}{A\omega\omega' \cos \lambda}}.$$

Les considérations précédentes peuvent faire naître une ob-

jection qu'il est bon de prévenir. Le mouvement apparent du corps n'est pas dû seulement au moment $A\omega\omega'\cos i$, mais encore aux forces centrifuges composées agissant sur toutes les molécules du mobile dans son mouvement commun avec son axe, et de plus ω' est variable. Or la vitesse angulaire de rotation de la terre est très-petite, et la variation de ω' et la vitesse de l'axe de rotation sont du même ordre que le produit de ω par le moment ci-dessus, c'est-à-dire de l'ordre ω^2 que l'on peut négliger sans erreur sensible. La valeur ci-dessus de T doit donc être considérée comme exacte; elle coïncide d'ailleurs aux notations près avec celle que l'on déduirait du numéro précédent et de la loi du mouvement pendulaire.

Le gyroscope de M. Foucault permet d'observer directement T', T'', et par conséquent de trouver la latitude du lieu au moyen de la formule

$$\cos\lambda = \frac{T'^2}{T''^2}.$$

Si la position du méridien n'est pas connue, on déterminera les durées T_1, T_2 des oscillations correspondant à deux azimuts rectangulaires; et comme on reconnaît sans difficulté que $2 - \cos^2\lambda = T'^2\left(\frac{1}{T_1^4} + \frac{1}{T_2^4}\right)$, il vient, en éliminant T',

$$\tang\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{T''^4}{T_1^4} - \frac{T''^4}{T_2^4}\right)}.$$

Ainsi trois observations suffiront pour déterminer la latitude d'un lieu.

La rotation ω étant très-faible, les durées d'oscillations T_1, T_2, T'', seront très-petites. On diminuera la longueur des observations en réduisant le rapport $\frac{C}{A}$ ou en employant un solide de révolution annulaire ou très-aplati. En supposant, par exemple, que le corps tournant soit un ellipsoïde

de révolution aplati dans lequel le rapport des axes soit $\frac{1}{3}$, que ce tore fasse 2000 tours par minute, on trouve que $T_1 = 0^m 19^s$.

5. *Méthode mixte basée simultanément pour les théories des mouvements absolus et relatifs pour arriver aux formules relatives au gyroscope.* — Supposons que sur la *fig.* 73 (p. 349) OV représente la parallèle à l'axe de la terre mené par le centre de gravité O relativement fixe du solide de révolution, $O\xi$ l'axe de révolution, $O\zeta$ la perpendiculaire en O dans le plan $VO\xi$, $O\eta$ la normale au même plan; n, r, s les composantes de la rotation instantanée relative du corps suivant $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$; ω la rotation de la terre; α l'angle $VO\xi$; α_0 la valeur de α considérée comme initiale pour laquelle r, s sont nuls, n_0 étant la valeur correspondante de n; A, B les moments d'inertie du corps par rapport aux axes principaux $O\xi$, $O\zeta$ ou $O\eta$.

La rotation du corps dans l'espace absolu estimé suivant $O\xi$, ou $n + \omega \cos\alpha$, restant constante, on a

$$n = n_0 - \omega(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

D'autre part la résultante de la pesanteur et de la force centrifuge étant considérée comme passant par le centre de gravité O, la force vive dans le mouvement relatif reste constante, par suite

$$An^2 + B(r^2 + s^2) = An_0^2,$$

d'où, en négligeant le carré de ω,

$$(a) \qquad B(r^2 + s^2) = 2An_0\omega(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

Supposons d'abord que l'axe $O\xi$ soit assujetti à se mouvoir dans un même plan, faisant avec OV l'angle β, et soit φ l'angle formé par $O\xi$ avec la projection de OV sur ce plan,

on aura évidemment

$$r^2 + s^2 = \frac{d\varphi^2}{dt^2}, \quad \cos\alpha = \cos\beta\cos\varphi,$$

par suite

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{2An_0}{B}\omega\cos\beta(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

ce qui donne la loi du mouvement pendulaire, conformément à ce que nous avons trouvé plus haut.

Si l'axe $O\xi$ est complétement libre autour du point O, il faut établir une nouvelle relation, que nous obtiendrons en exprimant que, dans ce mouvement de rotation autour du point O dans l'espace absolu, la somme des moments des quantités de mouvement estimé suivant OV reste constante, et l'on trouve facilement que l'on a

$$\begin{aligned} &A(n + \omega\cos\alpha)\cos\alpha + B(s + \omega\sin\alpha)\sin\alpha \\ &= A(n_0 + \omega\cos\alpha_0)\cos\alpha_0 + B\omega\sin^2\alpha_0, \end{aligned}$$

d'où

$$Bs\sin\alpha = A(n_0 + \omega\cos\alpha_0)(\cos\alpha_0 - \cos\alpha) + B\omega(\sin^2\alpha_0 - \sin^2\alpha),$$

la rotation n_0 étant supposée très-rapide par rapport à ω, on peut dans cette équation négliger ω devant n_0, et écrire tout simplement

$$(b) \qquad Bs\sin\alpha = An_0(\cos\alpha_0 - \cos\alpha).$$

Les formules (a) et (b), comme il est facile de le reconnaître (Note IV, n° 3), ne sont autre chose que celles du mouvement d'un solide de révolution pesant autour d'un point de son axe, ce qui est conforme à ce que nous avons trouvé précédemment.

6. *Application de la théorie des mouvements relatifs à la démonstration du principe de la transmission de travail dans les machines, en ayant égard aux ébranlements des molécules.* — Dans l'application du principe des forces

vives à la théorie des machines, on considère les diverses parties de ces dernières comme formées de corps rigides dont les différents points conservent constamment entre eux leurs distances primitives; mais il n'en est pas ainsi dans la nature : les particules des corps solides vibrent autour de leurs positions moyennes et donnent lieu à un travail moléculaire dont il importe beaucoup d'apprécier l'importance.

Coriolis est arrivé à résoudre approximativement le problème, en rapportant les vibrations, de très-petite amplitude, des molécules d'un corps (M) aux positions des points correspondants du système invariable (S) que formerait le corps (M) si, à l'instant considéré, les molécules de ce dernier venaient subitement à s'arrêter dans leur mouvement vibratoire; mais la solution qu'il en donne dans son *Traité de la mécanique des corps solides,* basée sur des transformations de coordonnées, conduit à des calculs longs et pénibles, que l'on peut éviter, en remarquant qu'il existe une relation intime entre cette question et le théorème des forces vives dans le mouvement relatif.

Le mouvement de (S) résulte de la définition même de ce *système moyen;* car les sommes des projections et des moments de ses quantités de mouvement, relativement à trois axes rectangulaires, sont, à chaque instant, respectivement égales aux sommes analogues déterminées pour le corps (M); or les quantités de mouvement se composant comme les vitesses, la quantité de mouvement de chaque molécule de ce dernier corps est la résultante de la quantité analogue de (S) qui lui correspond, et de la quantité de mouvement due à la vitesse vibratoire; par suite les sommes des projections et des moments des quantités de mouvement vibratoire prises relativement aux trois axes ci-dessus sont nulles, ou encore ces quantités considérées comme des forces appliquées aux différents points de (S) se font équilibre autour de ce système invariable.

Cela posé, soient V et V_r les vitesses absolue et vibratoire de la molécule m de (M); V_m la vitesse contemporaine de la molécule correspondante de (S); T_m le travail des forces extérieures appliquées à (M) et estimé dans le mouvement de (S) depuis l'instant pris pour origine; T_r le travail des mêmes forces estimé dans le mouvement vibratoire; T_f le travail des forces moléculaires; le travail des forces extérieures dans le mouvement absolu des particules de (M) est évidemment $T_m + T_r$; par conséquent on a

$$\frac{1}{2}\Delta\Sigma m V^2 = T_m + T_r + T_f,$$

en donnant au symbole Δ la signification ordinaire d'*accroissement*.

Si l'on appelle T_e le travail des forces d'entraînement dues au mouvement relatif des molécules de (M) par rapport au système invariable (S) estimé dans ce même mouvement, on a, d'après un théorème connu,

$$\frac{1}{2}\Delta\Sigma m V_r^2 = T_r + T_f - T_e,$$

d'où

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{2}\Delta\Sigma m (V^2 - V_r^2) = T_m + T_e.$$

D'un autre côté, V étant la résultante de V_r et V_m, on a, en appelant x la projection de V_r sur V_m,

$$V^2 = V_r^2 + V_m^2 \pm 2 V_m x$$

et

$$\Sigma m (V^2 - V_r^2) = \Sigma m V_m^2 + 2\Sigma m V_m (\pm x).$$

Or nous avons démontré plus haut que les quantités de mouvement mV_r se font équilibre autour du système (S), ce qui, d'après le principe des vitesses virtuelles et en ap-

pelant dt l'élément du temps, s'exprime par

$$\Sigma m(\pm x)V_m dt = dt\,\Sigma m(\pm x)V_m = 0,$$

par conséquent la formule (A) devient

$$\frac{1}{2}\Delta\Sigma m V_m^2 = T_m + T_e$$

et donne lieu à ce théorème remarquable : *Le principe de la transmission de travail subsiste pour un système de molécules dont les vibrations sont d'une faible amplitude, en ne tenant compte que du mouvement moyen, pourvu que l'on ajoute au travail des forces extérieures, le travail estimé dans le mouvement vibratoire des forces qui, à chaque instant, seraient capables de produire sur chaque molécule, considérée comme libre, son mouvement moyen.*

Les six équations de translation et de rotation relatives au mouvement de (M) et par suite celles qui déterminent le mouvement de (S) ne renferment que les forces extérieures qui sollicitent ce corps; d'un autre côté, l'amplitude des vibrations de ce même corps étant très-faible, les coordonnées des différents points de (M) ou de (S) en un instant quelconque sont très-peu différentes de celles qui conviennent aux points autour desquels les vibrations s'exécutent, et dont l'ensemble constitue un corps identique à (M) supposé en repos; donc *le mouvement moyen est sensiblement celui que prendrait le corps* (M) *sous l'action des forces qui le sollicitent, si ses molécules n'étaient pas susceptibles de vibrer;* en d'autres termes, on peut prendre approximativement pour le mouvement moyen celui que l'on emploie dans la pratique lorsque l'on néglige l'influence des vibrations moléculaires. Il est maintenant facile de voir que le terme T_e, dû aux vibrations des molécules, est très-petit et par suite négligeable; désignons à cet effet

par ds un élément de la trajectoire décrite par chaque molécule dans son mouvement vibratoire, en projection sur la direction de la force d'entraînement φ_e; le terme de T_e qui correspond à la masse m est $\int_0^t \varphi_e \, ds$.

Pour effectuer cette intégration, il suffit d'ajouter les intégrales analogues prises pour tous les intervalles finis qui constituent t et pour chacun desquels $d\varphi_e$ reste constamment de même signe; soient t' et t'' les limites de l'un de ces intervalles, φ'_e, φ''_e, s', s'', les valeurs correspondant à ces limites de φ et de s; on aura

$$\int_{t'}^{t''} \varphi_e ds = \varphi''_e s'' - \varphi'_e s' - \int_{t'}^{t''} s d\varphi_e.$$

La différentielle $d\varphi_e$ conservant constamment le même signe, $\int_{t'}^{t''} s d\varphi_e$ sera de la forme $s_1(\varphi''_e - \varphi'_e)$, s_1 désignant une quantité de même ordre que s; l'expression ci-dessus deviendra ainsi

$$\varphi''_e(s'' - s_1) - \varphi'_e(s' - s_1),$$

quantité du même ordre que l'amplitude des déplacements et par conséquent négligeable; il en sera de même de la somme des quantités analogues, pour une même molécule, relatives à la totalité des intervalles compris entre o et t pour chacun desquels le signe de $d\varphi_e$ reste le même, et dont le nombre est nécessairement fini, et par suite de T_e, qui résulte de la réunion des sommes semblables pour toutes les molécules du corps.

Donc, *dans le principe de transmission de travail établi pour le mouvement moyen d'une machine, on peut faire abstraction des vibrations des différentes pièces qui la constituent.*

7. *De l'appareil pendulaire de M. Sire.* — Parmi les appareils décrits par M. Sire dans les *Archives des Sciences physiques et naturelles* de Genève, il y en a un qui met en évidence un phénomène paradoxal au premier abord, et tout à fait distinct de ceux qui se manifestent dans le gyroscope et ses dérivés; c'est cet appareil, déposé au cabinet de Physique de la Faculté des Sciences de Besançon, dont je me propose d'étudier les effets dynamiques.

Il se compose d'un pendule formé d'un tore dont les pivots sont maintenus dans une chappe relativement très-légère, se terminant à la partie supérieure par un couteau de suspension de direction perpendiculaire à celle de l'axe du tore. Le support du couteau est fixé excentriquement à une pièce horizontale que nous désignerons dorénavant par (S), et à laquelle on peut imprimer un mouvement de rotation plus ou moins rapide, au moyen d'une manivelle et d'un engrenage d'angle; à l'aide d'une vis de pression et d'une rainure pratiquée dans (S), on peut rapprocher ou éloigner l'appareil pendulaire de l'axe de rotation et orienter d'une manière quelconque le plan d'oscillation, par rapport au *plan méridien*; ce plan est défini par l'axe de rotation, et le milieu du couteau de suspension dont la verticale, lors du repos absolu des différentes pièces de l'appareil, passe par le centre de gravité du pendule et par le milieu de l'axe alors horizontal du tore.

Si, le plan d'oscillation coïncidant avec le plan méridien, on imprime à (S) un mouvement de rotation, le pendule, en vertu de la force centrifuge, s'éloigne de l'axe. Mais, si le tore est lui-même animé d'un mouvement gyratoire, selon que la rotation de (S) a lieu dans un sens ou dans l'autre, le pendule s'éloigne ou se rapproche, malgré la force centrifuge, de l'axe de (S), et peut même arriver à prendre une position sensiblement horizontale; toutefois le pendule ne parvient à se rapprocher de l'axe de (S) que lorsque la vitesse angulaire de cette pièce ne dépasse pas

une certaine limite, relativement à la rotation propre du tore.

Le même phénomène se produit quelle que soit l'orientation du plan d'oscillation, lors même qu'il est perpendiculaire au plan méridien, c'est-à-dire que le pendule passe d'un côté à l'autre de son support, pour prendre une position sensiblement horizontale, lorsque l'on vient à changer le sens du mouvement de la manivelle.

Soient ω, ω' les vitesses angulaires respectives de (S) et du tore; A, M le moment d'inertie du tore par rapport à son axe de rotation et sa masse; l la distance de son centre de gravité au couteau; ρ la distance de l'axe de (S) à l'axe de suspension du pendule. Nous négligerons dans ce qui suit la masse de la chappe en raison de sa petitesse par rapport à celle du tore.

Considérons le cas où le plan d'oscillation coïncide avec le plan méridien; au moment où l'on imprime à (S) son mouvement gyratoire, les forces centrifuges composées développées sur les différents éléments matériels du tore, résultant de la rotation relative de ce dernier par rapport à (S), se réduisent à un couple compris dans le plan d'oscillation dont le moment a pour expression (1) $A\omega\omega'$. Ce couple tendra à éloigner ou à rapprocher le pendule de l'axe de (S), selon que les rotations ω, ω' seront de sens contraire ou de même sens pour l'observateur placé successivement suivant la verticale du centre de gravité et la portion de l'axe du tore comprise entre cette verticale et l'axe de (S), en ayant les pieds en leur point de rencontre.

Dans le premier cas, la force centrifuge composée ajoutera son effet à celui de la force centrifuge, et le pendule s'éloignera de l'axe de (S) avec plus d'énergie que si le tore ne tournait pas.

Dans le second cas, si $A\omega\omega'$ surpasse le moment de la force centrifuge par rapport à l'axe de suspension du pendule, celui-ci se rapprochera de l'axe de (S). Or c'est ce

qui arrivera si l'on a

$$A\omega\omega' > Ml\rho\omega^2;$$

d'où

$$\frac{\omega'}{\omega} > \frac{Mla}{A} = \frac{a}{\lambda - l},$$

λ étant la longueur du pendule synchrone. On voit ainsi que le phénomène se produira d'autant plus facilement que la distance du pendule à l'axe de (S) sera plus petite par rapport à la distance des centres de gravité et d'oscillation.

L'influence de la force centrifuge allant en diminuant à mesure que l'angle formé par le méridien et le plan d'oscillation augmente, la même chose aura lieu à fortiori, quel que soit cet angle, si l'inégalité précédente est satisfaite; mais cette explication ne suffit pas pour faire voir pourquoi le pendule arrive en fort peu de temps à une position d'équilibre relatif sensiblement horizontale. Il nous faut donc pour cela étudier le mouvement de l'appareil en tenant compte des diverses circonstances dont il dépend.

Le mouvement relatif du pendule est dû à l'action combinée de la pesanteur, de la force centrifuge composée et de la force centrifuge. Nous continuerons à négliger l'inertie de la chappe. Soient :

M la masse du tore;
A son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation;
B son moment d'inertie autour de l'un de ses diamètres;
l la distance de son centre de gravité à l'axe de suspension;
α l'angle variable formé par la direction de cette distance avec la verticale;
g l'accélération de la pesanteur;
ρ la distance du milieu de l'axe de suspension à l'axe de rotation de (S);

φ l'angle aigu formé par ρ avec le plan méridien;
ω la vitesse angulaire constante de (S);
ω' la vitesse angulaire relative du tore autour de son axe, variable comme nous le verrons plus loin;
n la valeur initiale de ω' ou la rotation imprimée au tore.

Nous supposerons que le sens relatif des vitesses angulaires ω, ω' est tel, que le pendule se déplace en se rapprochant de l'axe de (S).

Le moment par rapport à l'axe de suspension, dû à l'inertie, se réduit à $\frac{d^2\alpha}{dt^2}(B + Ml^2)$, car de la variation de ω' résulte un couple dont le plan passe par cet axe.

Le moment pareil de la pesanteur a pour expression $Mgl \sin\alpha$.

Les axes de ω, ω' faisant entre eux un angle égal au complément de α, la force centrifuge composée résultant de ω donne le moment $A\omega\omega' \cos\alpha$ (4); quant aux composantes de la vitesse relative des différents points du tore, dues à la rotation $\frac{d\alpha}{dt}$ autour de l'axe de suspension, elles ne donnent que des forces centrifuges composées, parallèles à cet axe, dont les moments sont par suite nuls.

Cherchons maintenant à évaluer les termes auxquels donne lieu la force centrifuge. Concevons le plan horizontal passant par l'axe de suspension et prenons pour origine des coordonnées le pied O de la perpendiculaire GO abaissée du centre de gravité G du tore sur cet axe.

Soient A, Ox les traces sur ce plan, de l'axe de rotation de (S) et du plan d'oscillation; Oy la perpendiculaire à Ox dans le même plan horizontal; Oz la portion de la verticale du point O au-dessous de ce plan.

La composante de la force centrifuge due au mouvement d'entraînement (S), d'un point matériel quelconque m du tore, suivant Ox est $\omega^2 m(\rho \cos\varphi - x)$.

Le moment total de la force centrifuge par rapport à l'axe de suspension Oy a par suite pour valeur

$$-\omega^2 \Sigma m (\cos\varphi - x) z = \omega^2 \Sigma mxx - \omega^2 \rho \cos\varphi M l \cos\alpha.$$

Soient x', z' les coordonnées du point m rapporté à une parallèle Ox' à l'axe du tore et à OG, on a

$$x = x' \cos\alpha + z' \sin\alpha,$$
$$z = -x' \sin\alpha + z' \cos\alpha;$$

d'où

$$\Sigma mxz = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \Sigma m (z'^2 - x'^2),$$

attendu que OG, axe principal d'inertie du tore par rapport à son centre de gravité, jouit de la même propriété relativement à un point quelconque O de sa direction. Or

$$\Sigma m (y'^2 + z'^2) = A + M l^2,$$
$$\Sigma m (x'^2 + y'^2) = B;$$

d'où

$$\Sigma m (z'^2 + x'^2) = A + M l^2 - B;$$

l'expression du moment dû à la force centrifuge est donc

$$\frac{\omega^2}{2} \sin 2\alpha (A + M l^2 - B) - \omega^2 M \rho l \cos\varphi \cos\alpha,$$

et l'on a pour l'équation du mouvement du pendule

$$(B + M l^2) \frac{d^2\alpha}{dt^2} = A \omega\omega' \cos\alpha - M g l \sin\alpha + \frac{1}{2} \omega^2 \sin 2\alpha (A - B + M l^2)$$
$$- \omega^2 M \rho l \cos\varphi \cos\alpha.$$

Il nous reste à substituer dans cette équation la valeur de ω'. Or la rotation instantanée, dans l'espace absolu, du tore autour de son centre de gravité se compose des rotations ω, ω', $\frac{d\alpha}{dt}$; la composante suivant l'axe du tore est $\omega' + \omega \sin\alpha$;

mais elle est constante, puisque le tore supposé libre n'est soumis qu'à l'action de son poids, des réactions des crapaudines de la chappe qui rencontrent son axe, en négligeant toutefois les frottements. On a donc

$$\omega' + \omega \sin\alpha = n,$$

d'où

$$\omega' = n - \omega \sin\alpha,$$

et l'on a enfin pour l'équation du mouvement pendulaire

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} (B + Ml^2)\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= (A\omega n - \omega^2 M\rho l \cos\varphi)\cos\alpha - Mlg\sin\alpha \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega^2 \sin 2\alpha (Ml^2 - B). \end{aligned} \right.$$

En multipliant cette équation par $d\alpha$, puis intégrant en remarquant que $\frac{d\alpha}{dt} = 0$ pour $\alpha = 0$, il vient

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}(B + Ml^2)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 &= (A\omega n - \omega^2 M\rho l \cos\varphi)\sin\alpha \\ &\quad - 2Mlg\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{\omega^2}{2}\sin^2\alpha (Ml^2 - B), \end{aligned} \right.$$

formule qui n'est autre chose que le résultat de l'application du principe des forces vives.

On peut, du reste, arriver immédiatement à cette formule en exprimant que le demi-accroissement de la force vive est égal à la somme de travail de la pesanteur et de la force centrifuge. En effet, la force vive du système étant égale à la force vive due au mouvement du centre de gravité, augmentée de celle qui résulte du mouvement de rotation autour du centre, il vient pour son demi-accroissement

$$\frac{1}{2}(B + Ml^2)\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{1}{2}A(\omega'^2 - n^2).$$

Le travail dû à la pesanteur est $-Mgl(1-\cos\alpha)$; le travail de la force centrifuge est égal à la moitié du produit du carré de la vitesse angulaire ω par l'accroissement du moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation de (S); or le moment d'inertie correspondant à la verticale du centre de gravité est $A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha$, et par rapport à l'axe ci-dessus

$$A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha + M(l^2\sin^2\alpha + \rho^2 - 2\rho l\sin\alpha\cos\varphi);$$

d'où il suit que l'on a

$$\frac{1}{2}(B+Ml^2)\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \frac{1}{2}A(\omega'^2 - n^2) = -Mgl(1-\cos\alpha)$$

$$+\frac{\omega^2}{2}[(A+Ml^2-B)\sin^2\alpha - 2M\rho l\sin\alpha\cos\varphi],$$

et en remplaçant ω' par sa valeur, on retombe sur la formule (2). Mais cette méthode, quoique plus expéditive, ne met pas en évidence la cause première du phénomène, et la précédente nous paraît préférable.

Pour une valeur infiniment petite de α, le second membre de l'équation (2) se réduit à $\omega\alpha(An - \omega M\rho l\cos\varphi)$, et pour que le mouvement ait lieu dans le sens supposé, il faut que cette expression soit positive, ou que

$$\frac{n}{\omega} > \frac{M\rho l}{A}\cos\varphi,$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé plus haut dans le cas de $\varphi = 0$.

De l'équation (2) on déduit

$$dt = \pm\frac{1}{2}d\alpha\sqrt{\frac{B+Ml^2}{\sin\frac{\alpha}{2}\left\{\cos\frac{\alpha}{2}(An\omega - \omega^2M\rho l\cos\varphi) - \sin\frac{\alpha}{2}\left[Mgl - \omega^2\cos^2\frac{\alpha}{2}(Ml^2 - B)\right]\right\}}},$$

en prenant le signe + ou le signe —, selon que $d\alpha$ sera positif ou négatif.

Discutons cette formule : pour de très-petites valeurs de α, le dénominateur de la fraction sous le radical est positif, et le pendule doit s'écarter de la verticale dans le sens supposé, jusqu'au moment où ce dénominateur s'annulera ; la valeur correspondante α' sera la plus petite racine de l'équation

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} (An\omega - \omega^2 M\rho l\cos\varphi) \\ -\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\left[Mgl - \omega^2\cos^2\frac{\alpha}{2}(Ml^2 - B)\right] = 0. \end{array}\right.$$

A partir de cette valeur, α ne pourra plus croître, puisque alors le radical serait imaginaire ; le pendule devrait donc rétrograder jusqu'à la verticale, α devenant négatif, pour exécuter ensuite une oscillation identique à la première, et ainsi de suite.

En posant $z = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, la même équation se transforme en une équation du troisième degré

$$\begin{aligned} Mgz^3 - (An\omega - \omega^2 M\rho l\cos\varphi)z^2 + [Mgl - \omega^2(Ml^2 - B)]z \\ - (An\omega - \omega^2 M\rho l\cos\varphi) = 0, \end{aligned}$$

équation qui a au moins une racine positive ; la plus petite des racines positives de cette équation correspond à l'angle α', qui est par suite inférieur à 180°.

Il existe dans l'intérieur de l'angle α' une position pour laquelle le pendule serait en équilibre stable sous l'action des forces qui le sollicitent, et correspondant au maximum du second membre de l'équation (2). Il est facile de voir que cette position d'équilibre est la seule comprise dans le même angle α' ; car en égalant à zéro le second membre de l'équation (1), il vient

$$(5)\quad An\omega - \omega^2 M\rho l\cos\varphi - \operatorname{tang}\alpha[Mgl - \omega^2\cos^2\alpha(Ml^2 - B)] = 0.$$

et en posant $z = \tang\frac{\alpha}{2}$,

$$(6)\left\{\begin{array}{l}(An\omega - \omega^2 M\rho l\cos\varphi)z^4 + 2[Mgl - \omega^2(Ml^2 - B)]z^3 \\ -2[Mgl - \omega^2(Ml^2 - B)]z - (An\omega - \omega^3 M\rho l\cos\varphi) = 0,\end{array}\right.$$

équation qui n'a qu'une seule racine positive α'', puisque dans tous les cas elle ne présente qu'une variation.

Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 90^\circ$, le premier membre de l'équation (5) prend des valeurs de signes contraires; d'où il suit que α'' est inférieur à 90°.

Il est clair qu'il existe une valeur de ω pour laquelle l'écart α'' est le plus grand possible. Pour la déterminer, il suffit de différentier l'équation (6) par rapport à ω, ce qui donne

$$(7)\qquad An - 2\omega M\rho l\cos\varphi + \omega(Ml^2 - B)\sin 2\alpha = 0,$$

d'où

$$\omega = \frac{\frac{1}{2}An}{M\rho l\cos\varphi - (Ml^2 - B)\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Retranchant du double de l'équation (5) l'équation (7) multipliée par ω, on trouve

$$An\omega - 2Ml\rho\tang\alpha = 0;$$

et en remplaçant ω par la valeur ci-dessus

$$\frac{A^2n^2}{Ml\rho\cos\varphi - \sin\alpha\cos\alpha(Ml^2 - B)} - 4M\rho l\tang\alpha = 0.$$

Pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 90^\circ$, on obtient deux résultats de signes contraires, et cette équation a bien, conformément à nos prévisions, une racine comprise entre 0 et 90°. Mais on voit que α'' différera d'autant moins de cette dernière limite que n sera plus grand.

Si les oscillations indiquées par la théorie ne se manifestent pas dans le jeu de l'appareil de M. Sire, si le pendule arrive presque immédiatement à la position d'équilibre qui convient à la rotation normale de (S), cela tient à ce que le mouvement imprimé à la manivelle par l'expérimentateur n'est pas tout de suite sensiblement uniforme; il croît à partir de zéro jusqu'à une certaine limite de part et d'autre de laquelle il oscille en raison même des inégalités d'action dues à la nature des êtres organisés. Supposons, en effet, qu'en vertu d'une valeur constante de ω, le pendule s'écarte de la verticale jusqu'en OG′, où la vitesse est nulle; si à cet instant ω subissait un accroissement tel, que OG′ devînt une position d'équilibre, le pendule resterait en repos; mais si cet accroissement est un peu plus fort, le pendule s'écartera encore de la verticale et de OG′, d'un petit angle, viendra en OG″, et tiendrait à exécuter autour de OG′ une série de petites oscillations; mais si, le pendule arrivé en G″, ω reçoit un accroissement un peu supérieur à celui qui en ferait la position d'équilibre correspondante, l'oscillation descendante sera supprimée, et l'écartement augmentera encore, et ainsi de suite, jusqu'au moment où ω aura atteint sa valeur normale. Le pendule exécutera alors de part et d'autre de la position d'équilibre correspondante une série de petites oscillations qui seront bientôt anéanties par les frottements et la résistance de l'air. On comprend dès lors comment, ω croissant à partir de zéro de quantités très-petites, les oscillations sont anéanties successivement à l'exception des petites oscillations de part et d'autre de la position d'équilibre qui convient à la vitesse normale. Il est clair que si ω dépasse la valeur pour laquelle α'' est maximum, le pendule se rapprochera de la verticale.

Il est, du reste, facile de voir la modification que l'on devrait faire subir à la formule (1), dans le cas où l'on voudrait tenir compte de la variation du mouvement de rotation d'entraînement, puisqu'il suffit d'introduire dans le second

membre le moment de la force d'inertie du pendule dû à l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$. On remarque à cet effet que cette accélération équivaut à une même accélération angulaire autour d'une verticale de G, et à une accélération translatoire représentée par celle de ce point.

Or la composante de $\frac{d\omega}{dt}$, suivant l'axe du tore, donne des forces d'inertie qui se réduisent à un couple passant par l'axe de suspension. Sa composante suivant l donne un couple perpendiculaire à cette même direction et dont l'influence est nulle. Il ne reste donc que la force d'inertie due au centre de gravité où l'on supposerait la masse entière concentrée, et sa composante prise dans le plan méridien, la seule que l'on ait à considérer, est $Ml \sin\alpha \sin\varphi \frac{d\omega}{dt}$, dont le moment a pour valeur $-Ml^2 \sin\alpha \cos\alpha \cos\varphi \frac{d\omega}{dt}$. Tel est le terme que l'on devrait introduire dans le second membre de l'équation (2). Mais comme on ne connaît pas la loi de variation de ω, résultant de la nature même des moteurs animés, nos recherches sur ce point ne peuvent pas être poussées plus loin.

Pour trouver la loi des petites oscillations du pendule de part et d'autre de la position d'équilibre stable correspondant à la valeur normale de ω, posons $\alpha = \alpha'' + \delta$, δ étant l'angle variable formé par le pendule avec cette position et dont nous négligerons le carré. En substituant cette valeur dans l'équation (1), il vient

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = -\left[\frac{(A\omega n - \omega^2 M\rho l \cos\varphi)\sin\alpha'' + Mgl\cos\alpha'' - \omega^2\cos 2\alpha''(Ml^2 - B)}{B + Ml^2}\right]\delta.$$

On tire de là, en appelant δ l'écart maximum, pour lequel la vitesse est nulle, et en comptant le temps à partir de l'instant correspondant,

$$\delta = \delta_0 \cos\mu t$$